

Določanje oblike področja gibanja projekcije težišča

France Sevšek in Darja Rugelj
UNIVERZA V LJUBLJANI, Visoka šola za zdravstvo, Ljubljana

IZVLEČEK

Razvili smo nov način analize oblike in površine področja, ki ga opiše projekcija težišča pri pokončni stoji na pritiskovni plošči. Iz izmerjenih podatkov smo določili točke realnega ali konveksnega obrisa ter iz njih s prilagajanjem izračunali ustrezajoče Fourierjeve koeficiente. Tak postopek dobro popiše ne samo površino področja, ampak tudi njegovo obliko. Preizkusili smo ga s simuliranimi podatki in ga primerjali s standardnimi metodami. Ugotovili smo, da je naša metoda zanesljiva in uporabna predvsem v primerih, ko porazdelitev točk ni Gaussova in ko so pomembni posamezni veliki premiki projekcije težišča.

IZHODIŠČA

Meritev gibanja projekcije težišča s pritiskovno ploščo je eden od standardnih načinov določanja stabilnosti pokončne stoji med rehabilitacijo. Glede na to, da s pritiskovno ploščo merimo le gibanje projekcije težišča tridimenzionalnega človeškega telesa, ni presenetljivo, da se v literaturi načini interpretacije zelo razlikujejo. Iz izmerjenih podatkov navadno določimo osnovne statistične parametre, povezane z dolžino opravljene poti projekcije težišča in njegovo hitrostjo (1). Pogosto pa so pomembni parametri tudi površina merskega področja, njegove glavne smeri itd. V tem primeru lahko uporabimo analizo glavnih osi kovariančne matrike (2). Včasih pa se izkaže, da so nujne tudi zapletenejšje analize, povezane z nelinearno dinamiko, kot je na primer difuzijski model (3).

Osnovne podatke o obliki in smeri področja, ki ga opiše projekcija težišča, nam lahko da analiza glavnih osi kovariančne matrike (2):

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma^2_{xx} & \sigma^2_{xy} \\ \sigma^2_{yx} & \sigma^2_{yy} \end{bmatrix},$$

kjer so elementi

$$\sigma^2_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

in sta \bar{x} in \bar{y} povprečni vrednosti premikov v smeri x in y. Velikosti obeh glavni osi dobimo (2):

$$\sigma^2_0 = (\sigma^2_{xx} + \sigma^2_{yy} \pm \sqrt{(\sigma^2_{xx} - \sigma^2_{yy})^2 + 4\sigma^4_{xy}}) / 2.$$

Smer glavne osi določa kot \mathcal{G} , ki ga lahko preprosto izračunamo (2):

$$\operatorname{tg} \mathcal{G} = \frac{\sigma^2_{xy}}{(\sigma^2_0 - \sigma^2_{yy})}.$$

Ker smo za razliko od standardnega postopka v definiciji σ^2_{xy} namesto N v imenovalcu uporabili vrednost $(N-1)$, predstavljata lastni vrednosti take matrike kar vrednosti največjih standardnih odklonov. Zato se na primer lahko odločimo in popišemo mersko področje z elipso, ki ima osi velikosti 1,96 največjega standardnega odklona. V tem primeru bo taka elipsa zaobjela 85,35 odstotka vseh točk (2).

Vendar pa se pogosto izkaže, da področje, ki ga opiše projekcija težišča, ni elipsoidno, zato potrebujemo natančnejšo metodo za opis njegove oblike. Prav tako se včasih izkaže, da so za interpretacijo meritev pomembna predvsem posamezna velika nihanja težišča zunaj povprečnega področja. Takrat je za gibanje projekcije težišča primerno določiti zunanje področje, ki naj bo čim bolj konveksno. Za take primere je bilo treba razviti nov, zanesljivejši popis merskih podatkov, o katerem poročamo v tem prispevku. Razvili smo ustrezno računalniško programje in ga vključili v sistem za analizo merskih podatkov (4).

METODE

Določitev obrisa površine

Pri naših meritvah smo želeli čim bolj natančno popisati zunanji obris poti projekcije težišča, kot ga izmerimo s pritiskovno ploščo.

Najprej smo izračunali središče vseh izmerjenih točk (\bar{x} in \bar{y}) in glede nanj določili kot (φ) ter oddaljenost posamezne točke od središča. Vse točke smo nato uredili v zaporedje po kotu φ . Nato smo celotni kot razdelili na izbrano število intervalov in za vsakega od njih določili najbolj oddaljeno točko. Če v izbranem intervalu ni bilo nobene merske točke, smo tak interval preprosto spustili. Tako smo dobili zunanji obris merjenega področja, kot ga prikazuje slika 1.

Obravnavali smo tudi možnost določevanja povprečnega obrisa, pri čemer smo v vsakem intervalu kota izračunali povprečno vrednost oddaljenosti od središča vseh pripadajočih točk (slika 2).

Ker nas pri analizi meritev s pritiskovno ploščo pogosto zanima oblika podporne ploskve, ki ji še najbolj ustreza zunanji konveksni obris merjenega področja, smo obravnavali tudi to možnost. Za vse izračunane točke obrisa smo po vrsti, in sicer v obratni smeri gibanja urinega kazalca, določili vrednost vektorskega produkta

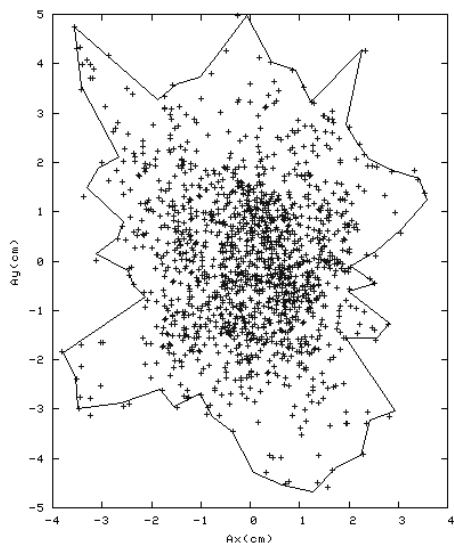
$$c = | \bar{a} \times \bar{b} | = a_x b_y - a_y b_x,$$

kjer je $\bar{a} = (a_x, a_y)$ vektor od prejšnje točke do dane točke in $\bar{b} = (b_x, b_y)$ vektor od dane točke do naslednje. Če vrednost c še normiramo, dobimo mero za kot med vektorjema:

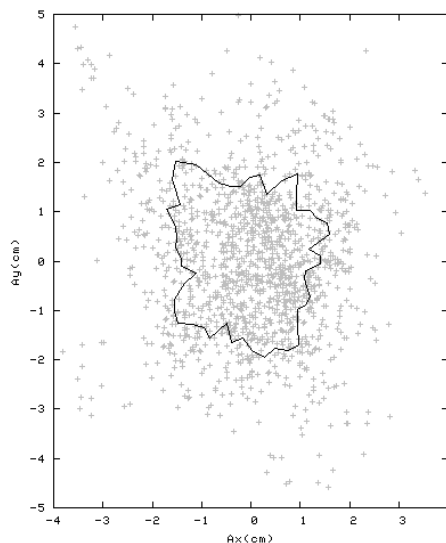
$$\sin \alpha = \frac{(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2}}$$

Kadar je $\sin \alpha$ pozitiven, je točka konveksna. Vse konkavne točke smo nadomestili s povprečno vrednostjo obeh sosednjih točk. Sicer bi lahko tako točko tudi preprosto spustili, vendar bi premajhno število točk obrisa lahko povzročilo težave pri določanju Fourierjevih koeficientov.

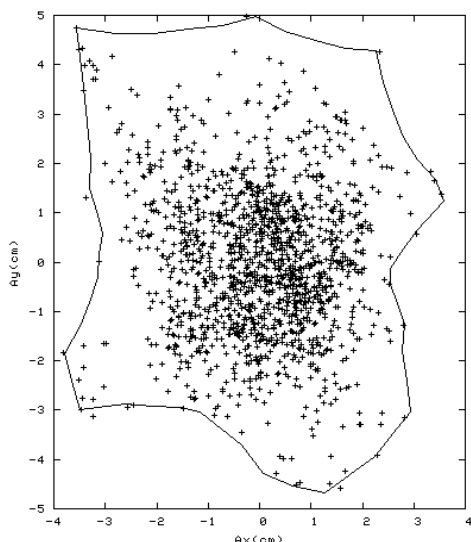
Kot primer prikazujemo na sliki 3 konveksen obris, izračunan z enakimi podatki, kot so na sliki 1.



Slika 1: Primer obrisa področja gibanja projekcije težišča, izračunan z razdelitvijo kota na 50 delov



Slika 2: Primer obrisa, izračunanega s povprečenjem po kotu, ki je razdeljen na 50 delov



Slika 3: Primer konveksnega obrisa. Podatki so enaki kot na sliki 1.

Fourierjevi koeficienti obrisa površine

Ko smo določili koordinate obrisa področja, lahko tega popišemo s Fourierjevimi koeficienti (5,6):

$$R(\varphi) = R_0 + \sum_{m=1}^{N_{\max}} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi),$$

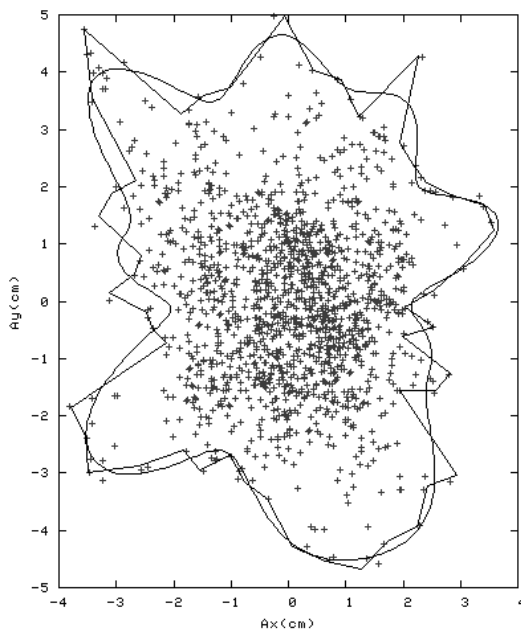
kjer je $R(\varphi)$ razdalja posamezne točke pri kotu φ od središča, a_m in b_m pa so ustrezni Fourierjevi koeficienti. Tak način popisa je najprimernejši takrat, ko so oblike obrisa skoraj okrogle (5).

Iz točk obrisa lahko Fourierjeve koeficiente določimo na več načinov. V našem primeru točke obrisa med seboj niso enako oddaljene, saj pogosto obstaja nekaj intervalov kota, v katerih obris ni definiran. Poleg tega čas računanja ni bistveno pomemben. Zato smo se odločili za najbolj neposredno metodo: prilagajanje gornje enačbe točkam obrisa po metodi najmanjših kvadratov. Pri tem Fourierjeve koeficiente spreminjamo tako, da je vsota kvadratov med izmerjenimi in izračunanimi točkami najmanjša. Tak postopek nas privede do sistema linearnih enačb, ki ga lahko preprosto rešimo. V ta namen smo uporabili razcep matrike na spodnji in zgornji trikotni del (razcep LU)(7) ter dobili rešitve s preprostim zaporednim vstavljanjem rešitev.

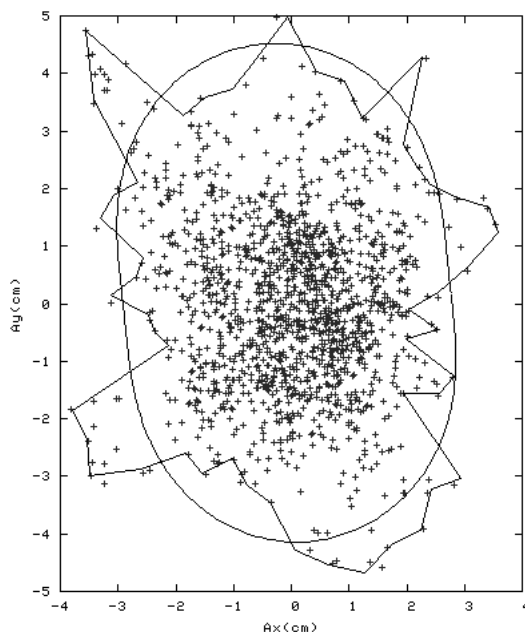
Površino področja, katerega obris določajo koeficienti a_m in b_m , preprosto izračunamo kot:

$$S = \pi R_0 + \pi \sum_{m=1}^{N_{\max}} (a_m^2 + b_m^2).$$

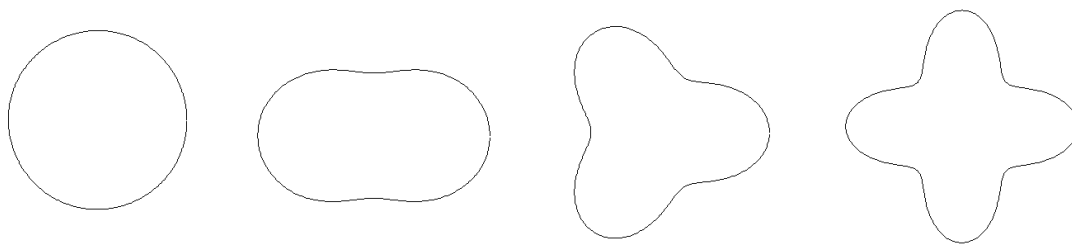
Kadar je izmerjeno področje predvsem elipsoidne oblike, lahko določimo tudi smer njegove glavne osi. To je smer, v kateri je $R(\varphi)$ največji. Za $m = 2$ dobimo: $\tan 2\vartheta = b_2/a_2$.



Slika 4: Primer obrisa področja, določenega z 20 Fourierjevimi koeficienti (gladka krivulja)



Slika 5: Obrs, izračunan samo s Fourierjevimi koeficienti do $m = 2$ (gladka krivulja). Izračunani kot glavne osi je 96° , razmerje med osema pa 1,53.



Slika 6: Oblike področja, izračunane za $R_0 = 1$ (levo) in le enim koeficientom $a_m = 0,3$ za $m = 2, 3$ in 4

Interpretacija rezultatov

Na opisani način poleg površine izračunamo tudi glavno smer in kvadrate Fourierjevih koeficientov. Ti nam povedo, kako se oblika razlikuje od kroga, kar vidimo na sliki 6, kjer je narisanih nekaj oblik, izračunanih pri vrednosti $R_0 = 1$. Če so vsi koeficienti enaki nič, je oblika okrogla. Sledi oblika, izračunana z $a_2 = 0,3$. Ta oblika je elipsasta, razpotegnjena je v eni smeri, čeprav to ni elipsa. Koeficient a_3 opisuje trikotno deformacijo, a_4 štirikotno itd. Izkaže se, da lahko s tako neskončno serijo deformacij opišemo vsako obliko, če le lahko njen obris enolično zapišemo kot funkcijo kota. V splošnem posamezna deformacija ni nujno v smeri osi x , zato moramo poleg a_m upoštevati tudi koeficiente b_m . Vendar pa ugotovimo, da obliko deformacije določa le vsota kvadratov ($a_m^2 + b_m^2$), ki ni odvisna od kota zasuka. Ker pričakujemo, da je prevladujoča deformacija elipsasta ($m = 2$), smo glavno smer izračunali za to obliko.

Oglejmo si primer meritev, ki je prikazan na sliki 4. Tu nam je analiza oblike dala parametre, kot so podani v tabeli 1. Takoj opazimo, da prevladuje predvsem elipsasta deformacija ($m = 2$), precej manjša je četverkotna ($m = 4$), sledi pa peterkotna ($m = 5$). Trikotne oblike pri $m = 3$ skoraj ni, koeficienti pri $m = 1$ pa pomenijo le premik središča in morajo biti vedno skoraj nič. Če izračunamo obris samo s koeficienti do $m = 2$, dobimo sliko 5.

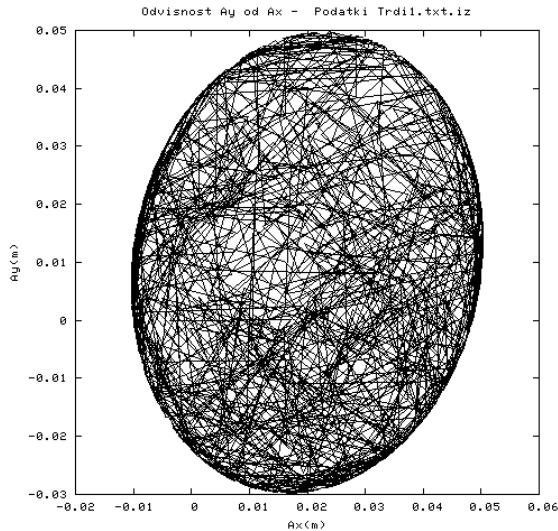
Tabela 1: Koren vsote kvadratov Fourierjevih koeficientov za obliko, ki je prikazana na sliki 4

	$R_0 (m = 0)$	$m = 1$	$M = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$(a_m^2 + b_m^2)^{1/2} [\text{cm}]$	4,225192	0,000060	0,643912	0,051670	0,326915	0,160563

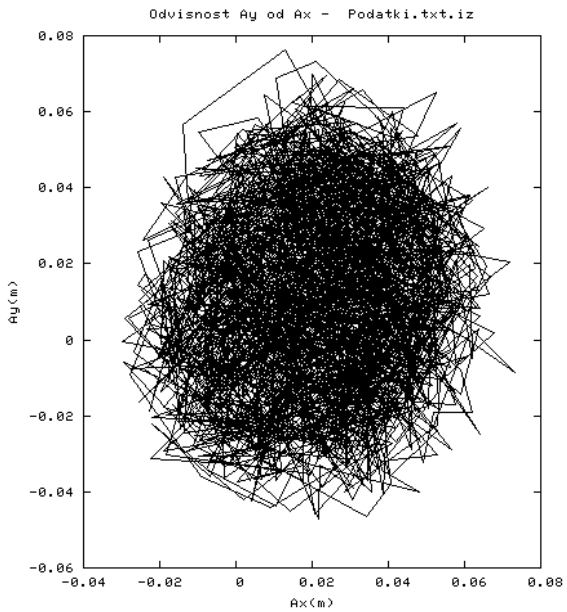
Simulacija meritev

Svojo programsko opremo smo najprej dobro preizkusili pri obdelavi podatkov simuliranih meritev. Te smo na več različnih načinov ustvarili s fortranskim programom (NarediPodatke.f). Vsem je bilo skupno, da se projekcija težišča lahko prosto in slučajno giblje znotraj področja, ki ga omejuje elipsa z osema a in b , nagnjenima za izbrani kot glede na os x . Ko pa projekcija težišča slučajno pade zunaj izbranega področja, imamo več možnosti:

1. Trdi rob: točko, ki pade zunaj področja, vrnemo na rob in nadaljujemo postopek. Tako dobimo gibanje projekcije težišča le znotraj izbranega področja. Če ta zadene rob področja,



Slika 7: Simulacija gibanja projekcije težišča za trdi rob, kjer je $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, kot 80 stopinj



Slika 8: Simulacija gibanja projekcije težišča za mehki rob, kjer je $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, kot 80 stopinj in $T = 2$

se tam zaustavi in se prej ali slej vrne v notranjost. Primer tako dobljenega gibanja projekcije težišča prikazuje slika 7.

2. Mehki rob: če točka pade zunaj izbranega področja, jo sprejmemo le z verjetnostjo $e^{-E/T}$, drugače pa se vrne na prejšnje mesto. Pri tem lahko E razumemo kot energijo, ki je sorazmerna kvadratu oddaljenosti od roba na zunanji strani, T pa ustreza temperaturi. Ta model ustreza gibanju v potencialu, ki je znotraj izbranega področja raven in kvadraten zunaj njega. To pomeni, da projekcija težišča sicer lahko potuje zunaj izbrane površine, vendar so te poti z oddaljenostjo od roba vse manj verjetne, temperatura (T) pa določa to verjetnost. Primer tako dobljenega gibanja projekcije težišča prikazuje slika 8, ki je bila narejena na podlagi rezultatov programa, prikazanega v tabeli 2. Pričakujemo, da je tak opis pogosto zelo primeren za simulacijo podatkov, izmerjenih s pritiskovno ploščo.

REZULTATI

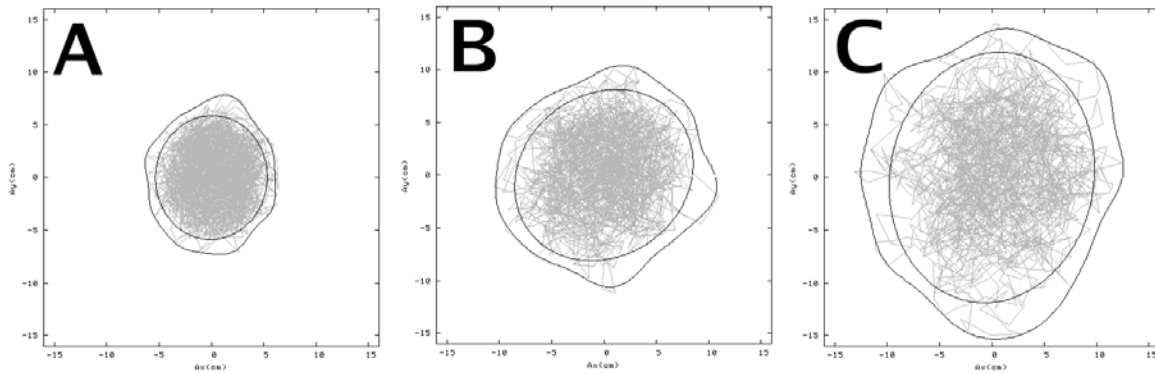
Metodo računanja oblike področja gibanja projekcije težišča smo preizkusili na simuliranih podatkih. Izračunali smo 2000 točk za primer mehkega roba, kot je opisan v prejšnjem poglavju. Za dolžino glavnih osi a in b smo izbrali vrednosti 4 cm in 3 cm ter nagnili osnovno elipso za kot 80° glede na abscisno os. Površina osnovne elipse je bila tako $37,70$ cm^2 . Faktor temperature (T) smo spreminjali na intervalu od 0,01 do 100. Pri nizkih temperaturah je bilo gibanje težišča omejeno skoraj izključno na osnovno elipso, ko pa je temperatura narasla, se je gibanje vse večkrat premaknilo tudi zunaj tega področja. Po pričakovanju nam da tak način popisa podatke, ki se precej dobro ujemajo z izmerjenimi.

Za vse simulirane podatke smo obliko in ploščino področja izračunali s Fourierjevimi koeficienti in z analizo glavnih osi kovariančne matrike (2). Slika 9 prikazuje nekaj tipičnih rezultatov. Pri nizkih temperaturah (slika 9A) je področje skoraj elipsasto in obe metodi popisa obrisa se ne razlikujeta bistveno. Seveda je konveksna oblika malo večja od oblike kovariančne elipse, saj prva zajema skoraj vse točke, slednja pa le 85,35 odstotka. Z višjo temperaturo postaja oblika vse bolj nepravilna in razlika med popisoma narašča. Če se spomnimo, da analiza kovariančne matrike temelji na Gaussovi porazdelitvi točk v dveh pravokotnih smereh, nas tak rezultat ne preseneti. Bolj kot je gibanje nepravilno, slabši je popis s kovariančno matriko. To potrdijo tudi izračunane površine, ki so prikazane na sliki 10. Vidimo, da se pri nizkih temperaturah obe površini ujemata s površino osnovne elipse, pri višjih temperaturah pa postaja razlika vse večja.

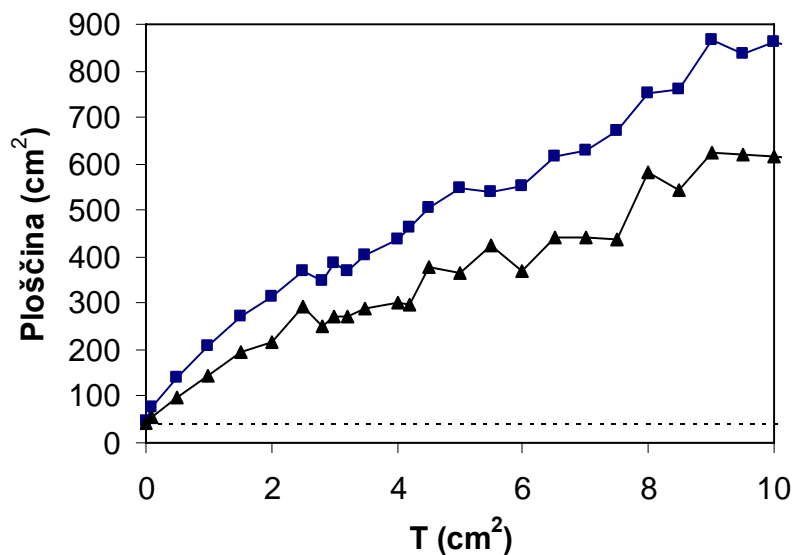
Težave s standardnim popisom se v celoti pokažejo pri analizi področja, dobljenega z metodo trdega roba (slika 11). Taka porazdelitev se močno razlikuje od Gaussove, saj se na robu elipse nabere veliko število točk. Te prispevajo velik delež k standardnemu odklonu porazdelitve in rezultat popisa področja s kovariančno matriko nam da celo obris, ki je veliko prevelik. V takem primeru je rezultat našega popisa veliko ustrežnejši.

Tabela 2: Program za ustvarjanje testnih podatkov

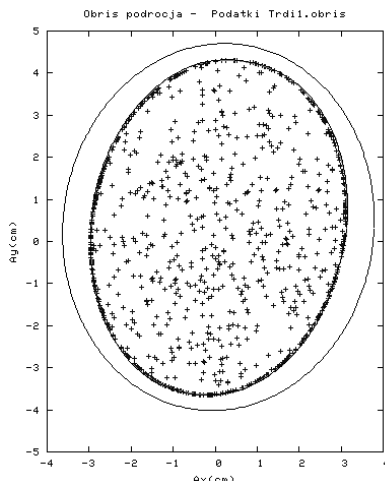
<pre> Program NarediPodatke c ***** C Naredimo podatke za meritev force platform c ***** IMPLICIT NONE character*240 niz character*50 prog character*80 Fout integer i,N,iseed,j,k, TrdiRob Real a,b, a2,b2,kot,Pi /* osi elipse */ Real x0,y0 /* koordinatno izhodišče */ Real Ax,Ay,x /* koordinate */ Real Ax1,Ay1 /* koordinate za test*/ Real dx,dy, korak Real t,dt,Fx,Fy,Fz,Ft,F0,dF Real R, Fi, R0, E,kB C----- Prog = 'NarediPodatke -V1.1- 15.9.2006 (sevsek)' C----- pi = 3.141592 N=1000 ! Največje število podatkov a=4.0 /* osi v cm! */ b=3.0 kot=80.0 /* kot v stopinjah */ x0=2.0 y0=1.0 TrdiRob=0 korak=0.5 F0=500 /* sila */ dF=10 dt=0.01 kB= 10.0 KB= 2.0 Fout='Podatki.txt' kot=kot*Pi/180.0 a2=a*a b2=b*b write (6, '(2A)')----- write (6, '(2A)')Prog open(1, FILE=Fout, STATUS='UNKNOWN') Ax=0.0 Ay=0.0 iseed=1 /* restart the sequence */ dx=rand(iseed) iseed=0 t=0.0 do 1 i=1,n dx=(0.5-rand(iseed))*b/korak dy=(0.5-rand(iseed))*b/korak Ax=Ax+dx Ay=Ay+dy Fi= Atan2(Ay,Ax) R=Ax*Ax+Ay*Ay </pre>	<pre> R=Sqrt(R) R0= a2*b2/(b2*cos(Fi-kot)*cos(Fi-kot)+a2*sin(fi-kot)*sin(fi-kot)) R0= Sqrt(R0) if (R.ge.R0)then /* Tocka je zunaj elipse */ C trdi rob R=R0 if(TrdiRob.eq.1)then /* */ Ax=R0*Cos(Fi) Ay=R0*Sin(Fi) else C z verjetnostjo exp(-E/kB) E=(R-R0)*(R-R0) x= exp(-E/kB) if (rand(iseed).ge.x) then Ax=Ax-dx Ay=Ay-dy write (6, '(7(A,F15.6))')-- R>R0: R=',R', R0=',R0', Ax=',Ax', Ay=',Ay else write (6, '(7(A,F15.6))')**R>R0: R=',R', R0=',R0', Ax=',Ax', Ay=',Ay endif endif /* TrdiRob */ endif /* if (R.ge.R0) */ Fx=dF*rand(iseed) Fy=dF*rand(iseed) Fz=F0+dF*rand(iseed) Ft=F0+dF*rand(iseed) Ax1=Ax+x0 Ay1=Ay+y0 write (1, '(7(F15.6))') T,Fx,Fy,Fz,Ft,Ax1/100.0,Ay1/100.0 1 continue close(1) write(6, '(A,i2)')TrdiRob=',TrdiRob write(6, '(A,i6)')Stevilo tock N =',N write(6, '(7(A,F15.6))')A =',a, ' B=', B, ' kot=',kot write(6, '(7(A,F15.6))')Ploscina =',Pi*a*b, ' A/B=', A/B write (6, '(2A)')----- write (niz,'(2A)')cat /home/meritev/programi/Podatki0 > /home/meritev/programi/tmp ' call System(niz,i) write(6, '(3A,i2)')call System: ',niz,' status =',i write (niz,'(3A)')cat /home/meritev/programi/',Fout,' >> /home/meritev/programi/tmp ' call System(niz,i) write(6, '(3A,i2)')call System: ',niz,' status =',i write (niz,'(3A)')cp /home/meritev/programi/tmp /home/meritev/programi/',Fout call System(niz,i) write(6, '(3A,i2)')call System: ',niz,' status =',i write (6, '(2A)')----- END </pre>
---	--



Slika 9: Oblika področja gibanja projekcije težišča za mehki rob, kjer je glavna os, $a = 4$ cm, nagnjena za kot 80 stopinj glede na os x , $b = 3$ cm ter $T = 0,5$ (A), $2,0$ (B) in $5,0$ (C). Zunanji obrisi so izračunani s Fourierjevo analizo konveksnega obrisa, notranji pa so rezultat popisa s kovariančno matriko.



Slika 10: Ploščina področja gibanja projekcije težišča za podatke, izračunane z različnimi vrednostmi parametra temperature (T). Zgornja krivulja(■) je določena s Fourierjevo analizo, spodnja(▲) je iz kovariančne matrike, ravna črtkana črta pa predstavlja ploščino osnovne elipse.



Slika 11: Analiza oblike področja gibanja projekcije težišča za podatke, izračunane z metodo trdega roba, ki so prikazani na sliki 7. Zunanji obris je rezultat popisa s kovariančno matriko, notranji pa je izračunan s Fourierjevo analizo konveksnega obrisa.

RAZPRAVA

Metodo popisa oblike področja gibanja projekcije težišča s Fourierjevo analizo smo razvili za boljšo interpretacijo stabilometričnih meritev pri starostnikih. Pokazali smo, da je tak popis izvedljiv in tudi ustrezen. Kadar je porazdelitev merskih točk preprosta in približno ustreza Gaussovi porazdelitvi, je naš opis enakovreden standardnemu z analizo kovariančne matrike. Njegova prednost pa se pokaže predvsem pri analizi zapletenejših podatkov, ko s Fourierjevo analizo oblike obrisa dobimo pravilne vrednosti površine področja gibanja projekcije težišča, poleg tega pa nam da ta metoda še podatek o obliki izmerjenega področja. Kolikšna je praktična vrednost takega popisa, pa bo mogoče oceniti šele po daljši uporabi za interpretacijo realnih meritev.

SKLEP

Za interpretacijo stabilometričnih meritev pri starostnikih je Fourierjeva analiza oblike področja gibanja projekcije težišča zelo primerna. Zato smo jo vključili v naš računalniški sistem za obdelavo podatkov in jo bomo uporabljali pri nadaljnjih obravnavah meritev.

LITERATURA

1. J. Maciaszek, W. Osinski, R. Szeklicki, A. Salomon, R. Stemplewski. Body balance parameters established with closed and open eyes in young and elderly men. *Biology of Sport*, 23 (2006) 185–193.
2. L. F. Oliveira, D. M. Simpson, J. Nadal. Calculation of area of stabilometric signals using principal component analysis, *Physiol. Meas.* 17 (1996), 305–312
3. J. J. Collins, C. J. De Luca. Open-loop and closed-loop control of posture: A random-walk analysis of center-of-pressure trajectories. *Exp. Brain. Res.* 95 (1993) 308–318.
4. F. Sevšek, D. Rugelj. Sistem za obdelavo stabilometričnih meritev. V tem zborniku. 2006.
5. F. Sevšek, G. Gomišček. Shape determination of attached fluctuating phospholipid vesicles. *Comput. methods programs biomed.* [Print ed.], 2004, no. 3, vol. 73, str. 189–194.
6. F. Sevšek, M. Jakovljević. Heart rate variability – a shape analysis of Lorenz plots. *Cell. Mol. Biol. Lett.*, 2002, vol. 7, no. 1, str. 159–161.
7. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C.* Cambridge University Press, 1992.