JANEZ ŽIBERT

Matematične osnove biofizike

ZDRAVSTVENA FAKULTETA - UNIVERZA V LJUBLJANI - 2013

NASLOV: MATEMATIČNE OSNOVE BIOFIZIKE - 1. izdaja

AVTOR: dr. Janez Žibert

STROKOVNI PREGLED:
dr. France Sevšek
dr. Andrej Iršič

OBLIKOVANJE: dr. Janez Žibert

IZDALA:
Univerza v Ljubljani, Zdravstvena fakulteta, Zdravstvena pot 5, Ljubljana

ELEKTRONSKA IZDAJA

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)

ŽIBERT, Janez
Matematične osnove biofizike [Elektronski vir] / Janez Žibert. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : Zdravstvena fakulteta, 2013

Način dostopa (URL):
http://www2.zf.uni-lj.si/images/stories/datoteke/Zalozba/Matematicne_osnove_biofizike.pdf

ISBN 978-961-6808-45-3 (pdf)

265135360

Ljubljana, januar 2013

Predgovor

Ta knjiga je nastala na podlagi predavanj matematike, ki jih izvajamo kot uvodna predavanja pri predmetih Biofizika in Biofizika z biomehaniko na prvi stopnji študijskih programov Fizioterapija, Radiološka tehnologija, Ortotika in protetika in Laboratorijska zobna protetika na Zdravstveni fakulteti na Univerzi v Ljubljani.

Uvodna predavanja matematike na Zdravstveni fakulteti so namenjena predvsem ponovitvi srednješolske matematike s poudarkom na znanjih, ki so potrebna za nemoteno spremljanje vsebin Biofizike in ostalih predmetov, ki zahtevajo osnovno znanje matematike. Zato je knjiga namenjena predvsem študentom Zdravstvene fakultete, da lahko nadgradijo svoje znanje matematike in spoznajo uporabno moč matematičnih znanj tudi pri svojem strokovnem in raziskovalnem delu.

Knjiga je sestavljena iz treh poglavij. V prvem poglavju obravnavamo matematične funkcije, kjer se spoznamo z nekaj osnovnimi lastnostmi matematičnih funkcij in še posebej obravnavamo linearno, eksponentno, logaritemsko in trigonometrične funkcije. Ob predstavitvi vsake funkcije poskušamo podati tudi uporabo funkcij v posebnih primerih. V drugem poglavju se seznanimo z osnovami diferencialnega računa, ki ga uporabimo za določanje ekstremov funkcij in v zadnjem delu tudi za izpeljavo zveze za prileganje funkcij k podatkom. Zadnje poglavje je posvečeno integralnemu računu, kjer spoznamo osnovna pravila integriranja in uporabo integralov v fiziki. Seznanimo pa se tudi s postopki numerične aproksimacije izračunov določenih integralov.

Knjiga vsebuje več kot 60 primerov rešenih nalog in veliko slikovnega gradiva, ki omogočajo razumevanje matematičnih vsebin tudi brez posebnega predznanja matematike.

Knjiga je izvedena s pomočjo urejevalnika besedil *LaTeX*, velika večina grafov funkcij pa je bila narejena s programskim paketom *Mathematica, ver. 8*.

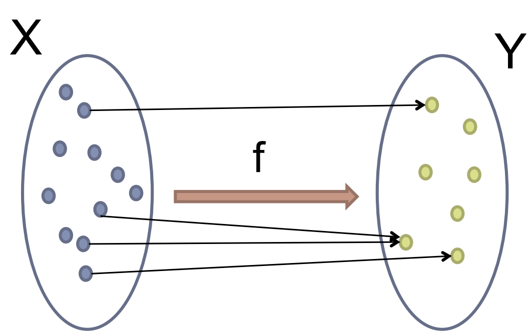
Ljubljana, november 2012 — Janez Žibert

Kazalo

1. Elementarne matematične funkcije

1.1 Matematične funkcije

Funkcija f je predpis, ki neki vrednosti x iz množice X priredi natanko eno vrednost y iz množice Y. V tem primeru rečemo, da funkcija f preslikuje elemente iz množice X v množico Y in to zapišemo kot $f : X \to Y$. Preslikavo vrednosti x v vrednost y s funkcijo f pa zapišemo kot $y = f(x)$. Funkcija $f : X \to Y$ je prikazana na sliki 1.1.

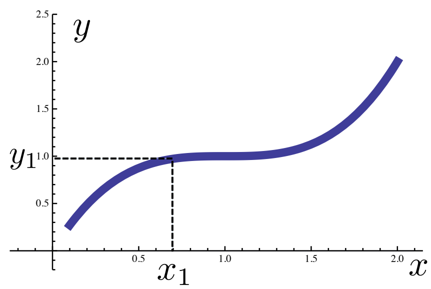


Slika 1.1: Shematični prikaz delovanja funkcije $f : X \to Y$.

Spremenljivko x imenujemo *neodvisna spremenljivka* funkcije f ali *argument funkcije* f, spremenljivko y pa imenujemo *odvisna spremenljivka* funkcije f ali *vrednost funkcije* f.

Množico vrednosti X, ki jo funkcija preslika v vrednosti v množici Y, imenujemo definicijsko območje funkcije in označimo z D_f, množico preslikanih vrednosti pa zaloga vrednosti funkcije, Z_f.

Funkcijo ene spremenljivke, kjer je definicijsko območje množica realnih števil, zaloga vrednosti pa je tudi podmnožica realnih števil, imenujemo realna funkcija realne spremenljivke. Primer takšne funkcije je prikazan na sliki 1.2.



Slika 1.2: Primer realne funkcije realne spremenljivke.

Funkcije lahko podamo na različne načine:

- **tabelarično**: v tem primeru podamo tabelarično zvezo med količinami. Primer tabelarično podane funkcije je prikazan v tabeli na sliki 1.3.

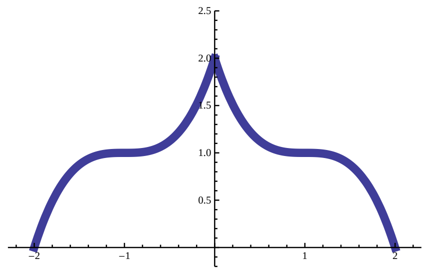
Hitrost (km/h)	Telesna masa						
	Kg	40	50	60	70	80	90
3		1.6	2.1	2.5	3.0	3.5	3.9
4		2.3	2.8	3.3	3.7	4.2	4.7
5		3.0	3.5	4.0	4.5	4.9	5.4
6		3.8	4.2	4.7	5.2	5.7	6.1
7		4.5	4.9	5.4	5.4	6.4	6.8

Slika 1.3: Primer meritev porabe energije merjene v kcal/min pri hoji človeka različne mase in ob različnih hitrostih hoje.

Tabelarični način podajanja zveze med količinami je zelo primeren, ko podajamo odvisnosti med posameznimi količinami v primeru različnih meritev, opazovanj, ipd. V tem primeru zvezo med količinami podamo samo za tiste kombinacije meritev, ki si jih izberemo ali vnaprej predpišemo. Zvezo med količinami tako podamo samo za izbrano kombinacijo meritev, manjkajo pa vrednosti za kombinacije, ki jih nismo obravnavali ali izmerili. V tem primeru moramo manjkajoče vrednosti dodatno določiti bodisi z metodami interpolacije ali z novimi meritvami, če je to mogoče.

- **grafično**: v tem primeru narišemo graf meritev ali količin, ki jih opazujemo. Primer grafa je prikazan na sliki 1.4.

  Tudi ta način je pogost pri podajanju zveze med količinami. Graf lahko ponazarja zvezo med količinami, ki so ponavadi realne spremenljivke, v dvo- ali tro-dimenzionalnem prostoru. Ni pa primeren za podaja-



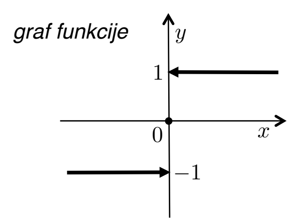
Slika 1.4: Primer grafa funkcije.

nje zveze pri večjih dimenzijah. Z grafa preslikave lahko ugotovimo lastnosti funkcije, kot npr., kje funkcija narašča, pada, kje dosežemo lokalne ekstreme ipd. Tudi pri grafu funkcije lahko podamo zvezo samo v območju, kjer pridobivamo meritve ali vrednosti, ne moremo pa ga določiti v točkah, kjer podatkov nimamo.

- **analitično**: tu podamo zvezo med neodvisnimi in odvisnimi spremenljivkami z matematično formulo.

vejnati zapis funkcije

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{za } x < 0, \\ 0, & \text{za } x = 0, \\ +1, & \text{za } x > 0 \end{cases}$$



Slika 1.5: Primer vejnato podane funkcije, ki določi predznak realnih števil.

Podajanje preslikave z matematično funkcijo je najboljši način podajanja zveze med obravnavanimi količinami. Na ta način je zveza med količinami povsem določena na področju delovanja funkcije. Poleg tega lahko takšne funkcije dodatno analiziramo z matematičnimi orodji. Funkcije so lahko podane kot funkcije ene, dveh, ali več neodvisnih spremenljivk, ki določajo eno ali več odvisnih spremenljivk.

V nadaljevanju bomo obravnavali predvsem funkcije, ki so podane analitično, torej z matematičnimi formulami, čeprav se je potrebno zavedati, da je pogosto takšne zveze v primerih iz realnega sveta težko določati. Zato se v teh primerih običajno podaja zvezo v tabelarični ali grafični obliki. Kako iz tabelaričnih ali grafičnih preslikav dobimo analitične preslikave, bomo pogledali v nadaljevanju, ko bomo spoznali postopek prileganja funkcij k podatkom.

Primer 1

Podana je funkcija $f(x) = 2x + 1$.

Potem velja:

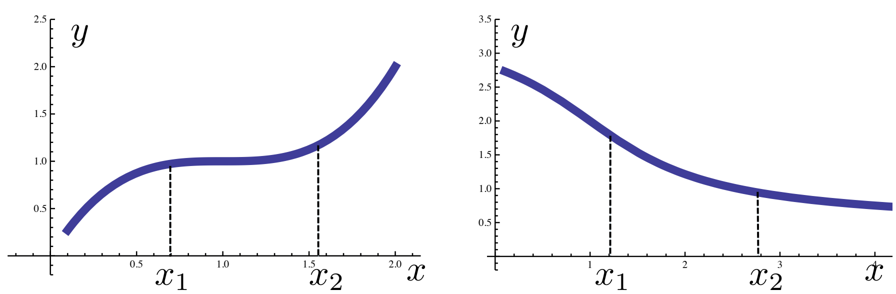
$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ f(3) &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ f(t+1) &= 2 \cdot (t+1) + 1 = 2t + 3 \\ f(-x) &= 2 \cdot (-x) + 1 = -2x + 1 \end{aligned}$$

1.2 Nekatere lastnosti matematičnih funkcij

V nadaljevanju bomo podali nekaj splošnih lastnosti realnih funkcij realnih spremenljivk.

1.2.1 Lastnost naraščanja ali padanja funkcije

Vrednosti funkcije se običajno spreminjajo. Če se funkcija spreminja, potem bodisi na nekem odseku narašča ali pa pada, če narašča ali pada na celotnem definicijskem območju govorimo o naraščajoči oziroma padajoči funkciji.Če se vrednosti funkcije ne spreminjajo, ampak vedno ostajajo enake, govorimo o konstantni funkciji.



Slika 1.6: Levo je primer naraščajoče funkcije, desno pa padajoče funkcije.

Naraščajoča funkcija je funkcija, za katero velja, da za poljubna $x_2 > x_1$ velja

$f(x_2) \geq f(x_1)$. V primeru stroge neenakosti govorimo o strogo naraščajoči funkciji.

Padajoča funkcija je definirana podobno kot naraščajoča. To je funkcija, za katero velja, da za poljubna $x_2 > x_1$ velja $f(x_2) \leq f(x_1)$. V primeru stroge neenakosti govorimo o strogo padajoči funkciji.

Primera naraščajoče in padajoče funkcije sta prikazana na sliki 1.6.

Primer 2

Pokaži, da je funkcija $f(x) = 2x + 1$ naraščajoča.

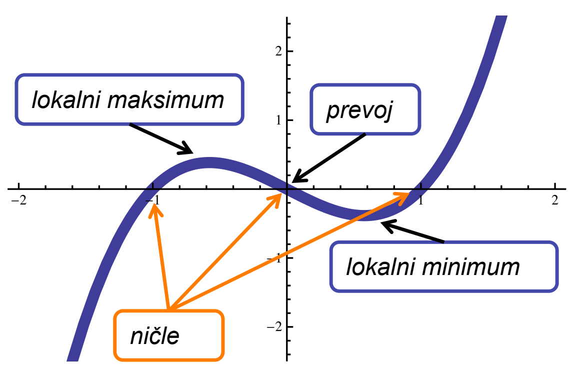
Izberemo poljubna x_1 in x_2, za katera velja $x_2 > x_1$, in izračunamo $f(x_1) = 2x_1 + 1$ in $f(x_2) = 2x_2 + 1$.

Vprašamo se, ali velja $2x_2 + 1 > 2x_1 + 1$.
Če na obeh straneh odštejemo 1, se lahko vprašamo ali velja $2x_2 > 2x_1$.
Če delimo še z 2, se lahko vprašamo, ali velja $x_2 > x_1$.
To pa velja po zgornji predpostavki.

Torej lahko na vsa gornja vprašanja odgovorimo pritrdilno, kar pomeni, da je res $f(x_2) = 2x_2 + 1 > 2x_1 + 1 = f(x_1)$.
Torej je $f(x)$ naraščajoča funkcija.

1.2.2 Posebne točke funkcije

Kot posebne točke funkcije obravnavamo lokalne ekstreme, prevoje in ničle funkcije, ki so prikazane na sliki 1.7.



Slika 1.7: Prikaz lokalnih ekstremov, prevoja in ničel funkcije.

Lokalni maksimum funkcije $f(x)$ je dosežen v točki x_0, če obstaja taka okolica točke x_0, da je vrednost $f(x_0)$ večja od vseh drugih vrednosti funkcije v tej okolici. V takih točkah se spremeni funkcija iz naraščajoče v padajočo funkcijo.

Podobno je definiran lokalni minimum. V točki x_0 je dosežen **lokalni minimum funkcije** $f(x)$, če obstaja takšna okolica točke x_0, da je vrednost $f(x_0)$ manjša od vseh drugih vrednosti funkcije v tej okolici. V takih točkah se spremeni funkcija iz padajoče v naraščajočo funkcijo.

Največjo oziroma najmanjšo vrednost, ki jo zavzame funkcija na celotnem definicijskem področju funkcije, imenujemo **globalni maksimum** oziroma **globalni minimum**.

Prevoje predstavljajo točke na grafu funkcije, kjer se spremeni predznak ukrivljenosti krivulje. To pomeni, da se v teh točkah oblika krivulje grafa spremeni iz konkavne v konveksno obliko, ali pa obratno.

Ničle funkcije $f(x)$ so dosežene v točkah x_n, za katere velja $f(x_n) = 0$. Ničle funkcije lahko včasih enostavno izračunamo, v večini primerov pa ničel ne moremo neposredno analitično določiti, ampak lahko samo numerično ocenimo s približki ničel. Tak postepek je npr. postopek *bisekcije*, kjer se z večkratnim razpolavljanjem intervala okoli kandidata za ničlo približamo dejanski vrednosti ničle funkcije.

Primer 3

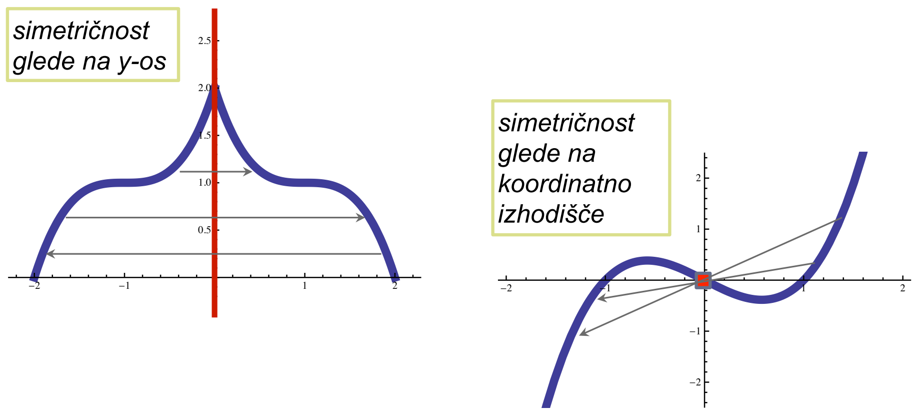
Poišči ničle funkcije $f(x) = x^3 - x$

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - x &= 0 \\ x(x^2-1) &= 0 \\ x(x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Ničle funkcije so pri $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ in $x_3 = -1$.

1.2.3 Sodost in lihost funkcije

Funkcije so lahko tudi simetrične. Če je funkcija simetrična glede na ordinatno os y, govorimo o sodi funkciji, če pa je simetrična glede na koordinatno izhodišče $(0, 0)$ pa govorimo o lihi funkciji. To je prikazano na sliki 1.8.



Slika 1.8: Soda funkcija (levo): simetričnost funkcije glede na y os. Liha funkcija (desno): simetričnost funkcije glede na koordinatno izhodišče.

Simetričnost sode funkcije pomeni, da za funkcijo pri poljubnem x velja:

$$f(-x) = f(x).$$

Simetričnost pri lihi funkciji, pa pomeni, da se vrednost funkcije pri poljubnem x preslika preko koordinatnega izhodišča v vrednost funkcije pri $-x$, da velja:

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{oziroma} \quad f(-x) = -f(x).$$

Simetričnost je pomembna lastnost funkcij, ki jo lahko izkoristimo v primeru določanja ostalih lastnosti funkcije. Če nekaj velja za eno stran simetrične funkcije, potem lahko to prenesemo tudi na drugo stran simetrije. Če imamo npr. sodo funkcijo $f(x)$ in smo poiskali ničlo funkcije v točki x_0, potem je ničla tudi v točki $-x_0$, saj velja $0 = f(x_0) = f(-x_0)$. Podobno lahko ugotovimo tudi za liho funkcijo. Če npr. ugotovimo, da imamo v točki x_m lokalni maksimum lihe funkcije $f(x)$, potem je v točki $-x_m$ lokalni minimum funkcije, saj velja $f(-x_m) = -f(x_m)$. Podobno ugotovitve lahko uporabimo tudi za ostale lastnosti simetričnih funkcij.

Primer 4

- *Pokaži, da je funkcija $f(x) = x^2$ soda.*

  Ker velja
  $$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$
  je funkcija soda.

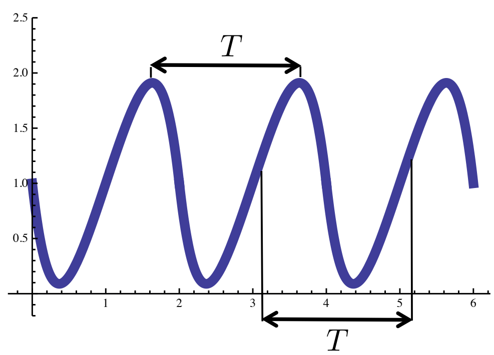
- *Pokaži, da je funkcija $f(x) = x^3 - x$ liha.*
  Ker velja
  $$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x),$$
  je funkcija liha.

1.2.4 Periodična funkcija

Funkcija je periodična, če velja, da je

$$f(x + T) = f(x)$$

za neko konstantno vrednost T. Najmanjše pozitivno število T, za katero je izpolnjena zgornja enakost, imenujemo *perioda* funkcije. Primer periodične funkcije je prikazan na sliki 1.9.



Slika 1.9: Primer periodične funkcije s periodo T.

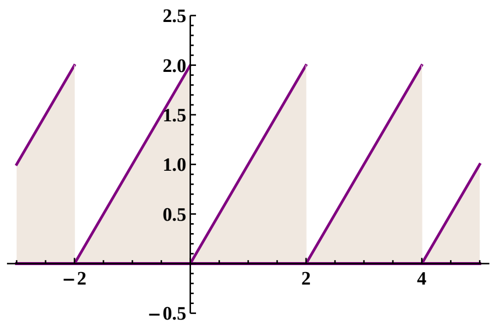
Tudi tu lahko podobno kot pri simetričnih funkcijah ugotovimo, da kar velja za funkcijo na eni periodi, velja za funkcijo tudi na vseh ostalih periodah. Tako npr. če imamo ničlo v točki x_0 periodične funkcije $f(x)$ s periodo T, potem so ničle tudi vse točke $x_0 + kT$ za $k \in \mathbb{Z}$. Enako velja za maksimume ali minimume in vse ostale lastnosti periodične funkcije.

Primer 5

Nariši funkcijo:

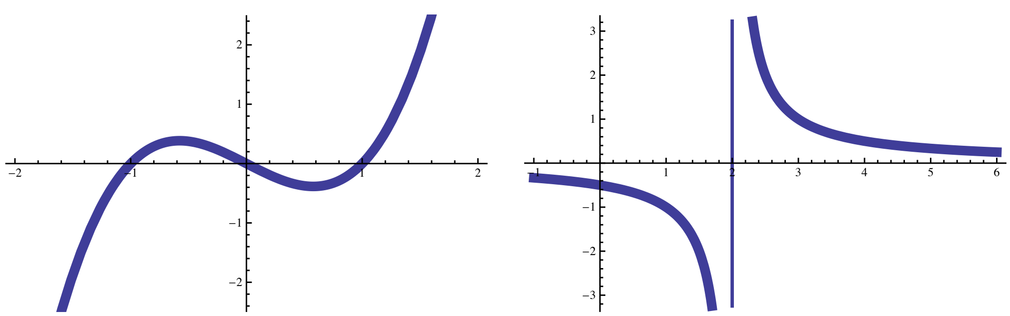
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ f(x) = f(x + k \cdot 2), & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

To je periodična funkcija s periodo 2. Graf funkcije je:



1.2.5 Zveznost funkcije

Funkcija je zvezna, če je graf funkcije nepretrgan. Nasprotno, če je graf funkcije vsaj v eni točki pretrgan, potem funkcija v tej točki ni zvezna. Primer zvezne in nezvezne funkcije je prikazan na sliki 1.10.



Slika 1.10: Primer zvezne (levo) in nezvezne funkcije (desno).

Poglejmo si, kaj se dogaja v točki, kjer je graf funkcije $f(x)$ na sliki 1.10 (desno) pretrgan. V tej točki imamo pol funkcije. Funkcija gre na levi strani pola proti $-\infty$, na desni strani pola pa prihaja iz $+\infty$. Denimo, da imamo točko nezveznosti, v našem primeru pol, pri točki x_c. Tako lahko zapišemo, da ko se točki x_c približujemo z leve strani, dobimo neko vrednost funkcije $f(x)$, ki jo označimo z L_- in jo formalno zapišemo z limito

$$\lim_{x \to x_c^-} f(x) = L_-.$$

Podobno lahko zapišemo, ko se približujemo točki x_c z desne strani:

$$\lim_{x \to x_c^+} f(x) = L_+.$$

Če velja, da obstaja takšna točka x_c, pri kateri

$$L_- \neq L_+,$$

potem pravimo, da je funkcija v točki x_c nezvezna. V nasprotnem pa velja, da je funkcija $f(x)$ v točki x_c zvezna, če sta limiti z desne in leve strani točke enaki:

$$\lim_{x \to x_c^-} f(x) = \lim_{x \to x_c^+} f(x) = f(x_c).$$

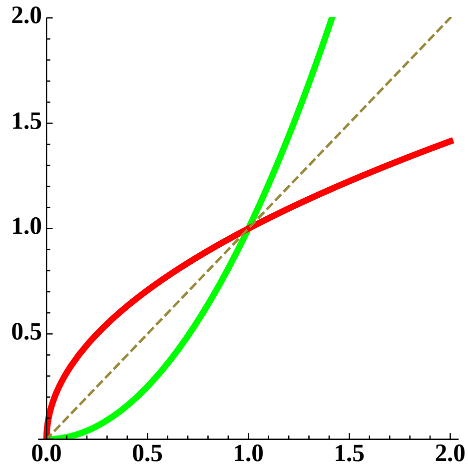
Če je funkcija zvezna v vsaki točki x_c, potem je funkcija zvezna.

1.2.6 Inverzna funkcija

Naj bo $y = f(x)$ strogo naraščajoča ali padajoča funkcija. Potem obstaja takšna funkcija $\varphi(y)$, za katero velja, da je $f(\varphi(y)) = y$ in $\varphi(f(x)) = x$. Funkcijo φ imenujemo *inverzna ali obratna funkcija* funkcije f in jo označujemo z $\varphi = f^{-1}$.

Inverzno funkcijo funkcije $y = f(x)$ izračunamo tako, da v enačbi $y = f(x)$ zamenjamo vlogi x in y in nato enačbo $x = f(y)$ rešimo za y. Tako dobimo y izražen s spremenljivko x v obliki $y = \varphi(x)$. Funkcija $\varphi(x)$ je inverzna funkcija funkcije $f(x)$.

Graf inverzne funkcije $y = \varphi(x)$ dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije $y = f(x)$ preko simetrale lihih kvadrantov $y = x$. To je prikazano v primeru kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ na sliki 1.11.



Slika 1.11: Graf inverzne funkcije (temnejša, rdeča krivulja) funkcije x^2 (svetlejša, zelena krivulja).

Primer 6

Določi inverzno funkcijo funkcije $y = x^2 - 3$.

Da določimo inverz funkcije, moramo zamenjati vlogi x in y. Torej

$$\begin{aligned} x &= y^2 - 3 \\ y^2 &= x + 3 \\ y &= \sqrt{x+3}, \quad \text{za } x + 3 > 0. \end{aligned}$$

To pomeni, da je

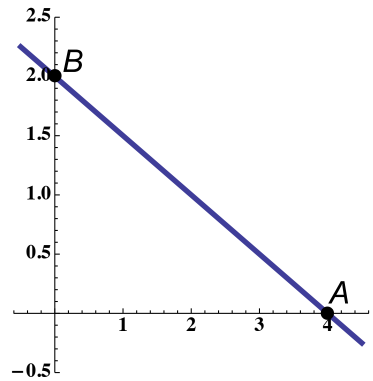
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}, \quad \text{za } x + 3 > 0.$$

1.3 Linearna funkcija

Matematična funkcija, ki ima obliko:

$$f(x) = ax + b,$$

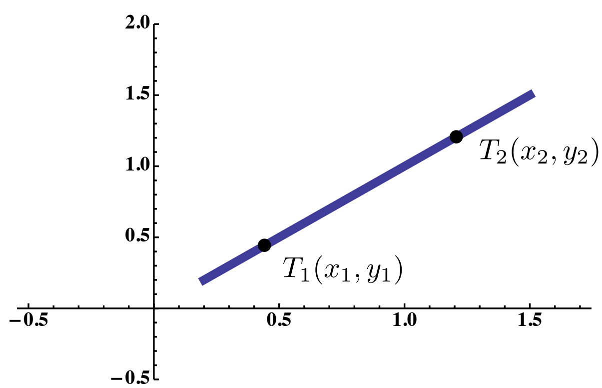
se imenuje linearna funkcija. Graf takšne funkcije je premica, prikazana na sliki 1.12.



Slika 1.12: Premica: graf linearne funkcije

Parameter a je smerni koeficient premice. Če je a pozitiven, potem linearna funkcija narašča, če je a negativen, potem funkcija pada. Premica seka y os v točki $B = (0, b)$ in x os v točki $A = (-b/a, 0)$.

Ker je graf linearne funkcija premica, lahko določimo parametre funkcije, če poznamo dve točki, skozi katere poteka graf dane funkcije. Tako lahko v primeru, prikazanem na sliki 1.13, z reševanjem sistema dveh enačb z dvema neznankama, izpeljemo parametra a in b:



Slika 1.13: Premica skozi dve točki, iz katerih določimo parametre linearne funkcije.

$$
\begin{aligned}
&y_1 = ax_1 + b\\
&y_2 = ax_2 + b, \quad \text{odštejemo drugo enačbo od prve}\\
&------\\
&y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)\\
&a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}
$$

Torej velja:

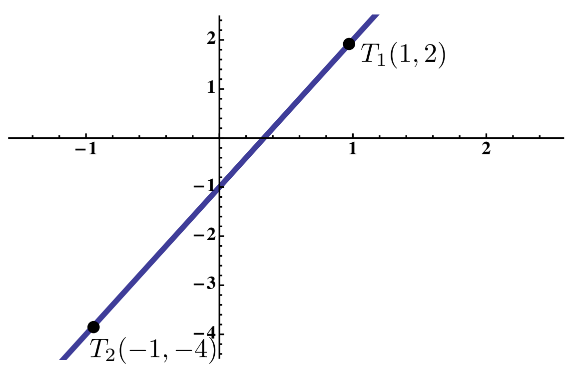
$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \quad \text{ali} \quad \boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

kjer je $\Delta y = y_2 - y_1$ in $\Delta x = x_2 - x_1$. Iz prve enačbe pa lahko izpeljemo obrazec za izračun parametra b:

$$\boxed{b = y_1 - ax_1}$$

Primer 7

Določi enačbo premice $y = ax+b$, ki gre skozi točki $T_1(1,2)$ in $T_2(-1,-4)$:



Določimo najprej smerni koeficient a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3,$$

nato še parameter b:

$$b = y_1 - ax_1 = 2 - 3 \cdot 1 = -1.$$

Enačba premice je torej:

$$y = 3x - 1.$$

Primer 8

Katere premice gredo skozi točko $(0, 1)$?

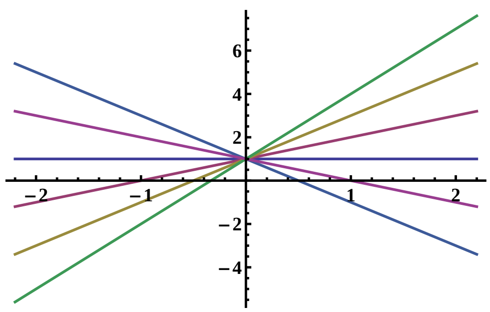
Enačba premice ima obliko $y = ax + b$. Ker točka $(0, 1)$ leži na premici, potem velja:

$$1 = a0 + b \implies b = 1.$$

Enačbe premice, ki gredo skozi točko $(0, 1)$ so tako:

$$y = ax + 1.$$

Prikazane so na sliki:



V primeru na sliki 1.14 imamo tri premice p_1, p_2 in p_3. Premici p_1 in p_2 sta vzporedni in pravokotni na premico p_3.

Za dve med seboj vzporedni premici $p_1 : y = a_1x + b_1$ in $p_2 : y = a_2x + b_2$ velja

$$a_1 = a_2,$$

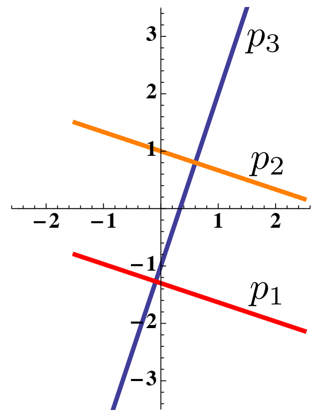
za dve med seboj pravokotni premici $p_1 : y = a_1x + b_1$ in $p_3 : y = a_3x + b_3$ pa velja:

$$a_1a_3 = -1.$$

Primer 9

Pokaži, ali sta premici, podani v segmentni obliki:

$$3x - 2y = 5 \quad \text{in} \quad 2x + 3y = 4,$$



Slika 1.14: Primer med seboj pravokotnih in vzporednih premic.

med seboj vzporedni ali pravokotni?

Enačbe premic preoblikujemo iz segmentne v običajno obliko:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 & \qquad 2x + 3y &= 4 \\ -2y &= -3x + 5 & \qquad 3y &= -2x + 4 \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} & \qquad y &= -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ker je produkt smernih koeficientov:

$$\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1,$$

sta premici med seboj pravokotni.

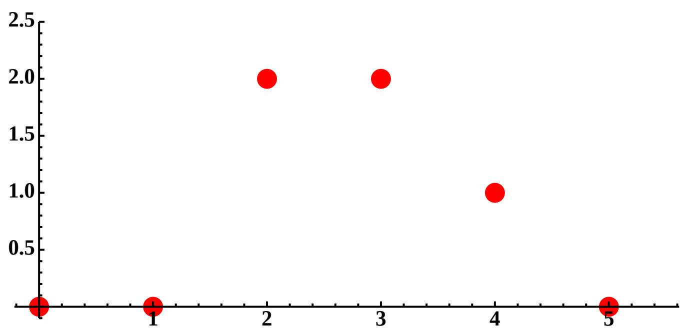
1.3.1 Odsekoma linearna funkcija

Včasih pridobimo meritve ali pa podatke samo pri določenih vrednostih in vmesnih vrednosti med eno in drugo meritvijo ne poznamo. V tem primeru lahko določimo vmesne vrednosti meritev iz izmerjenih vrednosti tako, da med dvema izmerjenima vrednostima določimo linearno funkcijo. Če to naredimo za vse pare izmerjenih vrednosti, dobimo graf, ki je sestavljen iz več različnih linearnih funkcij, ki pa se med seboj stikajo. V takem primeru smo sestavili funkcijo iz več delov linearnih funkcij in zato govorimo o *odsekoma linearni funkciji.*

Poglejmo si to na primeru. Denimo, da smo pridobili naslednje meritve:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0	2	2	1	0

Če narišemo graf meritev, dobimo točke na sliki 1.15.



Slika 1.15: Primer vrednosti meritev pri določenih vrednostih x.

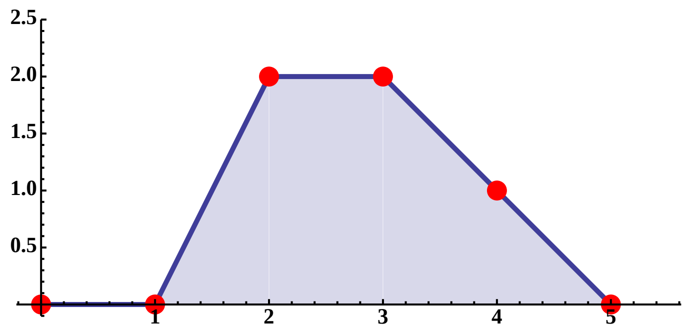
Med dvema vrednostima x_i in x_{i+1} lahko na podlagi izmerjenih vrednosti y_i in y_{i+1} določimo premico, ki poteka skozi točki (x_i, y_i) in (x_{i+1}, y_{i+1}). Če to storimo za vse pare vrednosti, dobimo v primeru naših meritev naslednjo vejnato funkcijo:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{med točkama } (0,0) \text{ in } (1,0), \\ 2x-2, & \text{med točkama } (1,0) \text{ in } (2,2), \\ 2, & \text{med točkama } (2,2) \text{ in } (3,2), \\ -x+5, & \text{med točkama } (3,2) \text{ in } (4,1), \\ -x+5, & \text{med točkama } (4,1) \text{ in } (5,0). \end{cases}$$

Ali:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x-2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

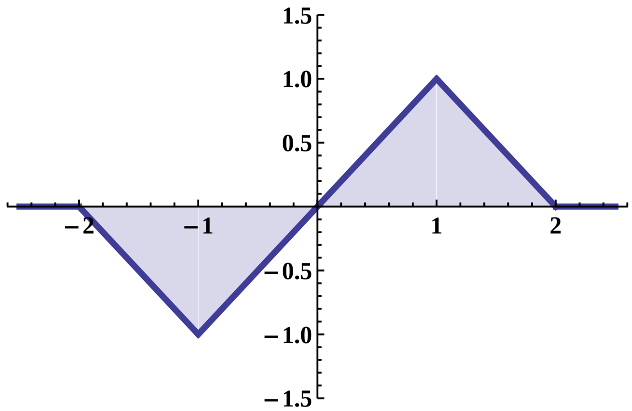
Premice na podintervalih smo izračunali iz točk, skozi katere gredo premice na posameznem podintervalu. Podintervala $[3,4]$ in $[4,5]$ smo združili v podinterval $[3,5]$, saj je na obeh podintervalih linearna funkcija enaka. Na ta način smo dobili vejnato funkcijo, ki je sestavljena iz premic in je prikazana na sliki 1.16.



Slika 1.16: Primer odsekoma linearne funkcije, ki je določena na podlagi podatkov iz rdečih točk.

Primer 10

Določi odsekoma linearno funkcijo iz grafa na sliki:



Ugotovi, kje je funkcija naraščajoča, padajoča in ali je soda ali liha.

Funkcija na sliki je sestavljena iz več linearnih funkcij na različnih intervalih.

- Na intervalu za $-\infty < x \leq -2$ je $f(x) = 0$.
- Na intervalu za $-2 \leq x \leq -1$ je $f(x)$ premica, ki jo izračunamo iz točk $(-2, 0)$ in $(-1, -1)$: $f(x) = -x - 2$.

- Na intervalu za $-1 \leq x \leq 1$ je $f(x)$ premica, ki jo izračunamo iz točk $(-1,-1)$ in $(1,1)$: $f(x) = x$.
- Na intervalu za $1 \leq x \leq 2$ je $f(x)$ premica, ki jo izračunamo iz točk $(1,1)$ in $(2,0)$: $f(x) = -x + 2$.
- Na intervalu za $2 \leq x < \infty$ je $f(x) = 0$.

Če zapišemo v obliki vejnate funkcije, potem dobimo:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -x+2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{drugje.} \end{cases}$$

Funkcija $f(x)$ je padajoča na intervalih $-2 < x < -1$ in $1 < x < 2$. Funkcija $f(x)$ je naraščajoča na intervalu $-1 < x < 1$.

Iz grafa funkcije $f(x)$ se vidi, da je funkcija liha. Pokažimo še to formalno. Da je funkcija liha, mora veljati $f(-x) = -f(x)$. V našem primeru moramo to pokazati za vsako vejo vejnate funkcije $f(x)$:

- Za $x > 2$ velja, da je $-x < -2$, zato je v tem primeru $f(x) = 0$ in $f(-x) = 0$, torej velja $f(x) = -f(-x)$.
- Za $1 < x < 2$ velja, da je $-2 < -x < -1$. To pomeni, da je $f(x) = -x + 2$ in $f(-x) = -(-x) - 2 = x - 2 = -(-x + 2) = -f(x)$.
- Za $0 < x < 1$ velja, da je $-1 < -x < 0$. To pa pomeni, da je $f(x) = x$ in $f(-x) = -x = -f(x)$.

Za vse možne primere smo pokazali, da velja $f(-x) = f(-x)$, torej je $f(x)$ res liha funkcija.

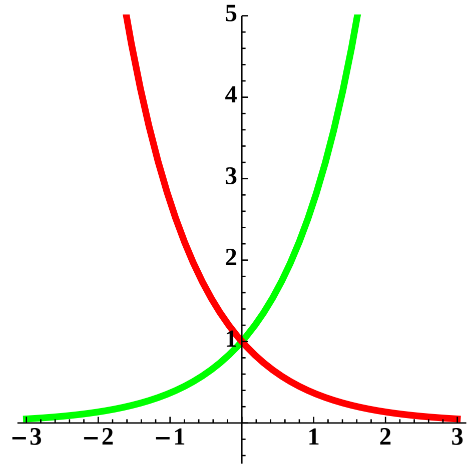
Linearne in odsekoma linearne funkcije podajajo najbolj osnovne zveze med neodvisnimi in odvisnimi spremenljivkami, zato se jih uporablja kot osnovne modele pri iskanju zveze med podatki, kar bomo videli v nadaljevanju, ko bomo v poglavju 2.3.1 pogledali, kako lahko z linearno funkcijo ugotovimo medsebojno odvisnost med meritvami s postopkom prileganja funkcij k podatkom.

1.4 Eksponentna in logaritemska funkcija

1.4.1 Eksponentna funkcija

Funkcijo
$$f(x) = a^x, \quad a > 0,$$
imenujemo **eksponentna funkcija**. Če je $a = e = 2.718281828456\ldots$, imenujemo funkcijo
$$f(x) = e^x$$
naravna eksponentna funkcija. Število a se imenuje osnova eksponentne funkcije, x pa eksponent. Negativni eksponent predstavlja funkcijo:
$$f(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

Na sliki 1.17 sta prikazana graf funkcij $f(x) = e^x$ z modro krivuljo in $f(x) = e^{-x}$ z rdečo krivuljo.



Slika 1.17: Eksponentna funkcija e^x (svetlejša, zelena krivulja) in e^{-x} (temnejša, rdeča krivulja).

Primer 11

Število $e = 2.718281828456\ldots$ se imenuje Eulerjevo število in je definirano kot

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ena izmed razlag, kako pridemo do števila e, je pri izračunu obresti. Če imamo 1 evro in so letne obresti 100%, potem

- bomo imeli v primeru izračuna obresti enkrat na leto po enem letu 2 evra.
- Če se obresti izračunavajo 2-krat na leto, potem izračunamo po 6-ih mesecih 50% obresti in na skupno vsoto čez 6 mesecev še enkrat 50% obresti. Tako dobimo po prvih 6-ih mesecih $1\cdot 1.5 = 1.5$ evrov, nato pa izračunamo še 50% obresti na to vsoto, torej $1.5\cdot 1.5$, ali, če zapišemo skupaj:

$$(1\cdot 1.5)\cdot 1.5 = 1\cdot 1.5^2.$$

- Podobno lahko zapišemo, če obračunavamo obresti 4-krat na leto:

$$1\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 1\cdot 1.25^4.$$

- Če izračunavamo 100% letne obresti n-krat letno, potem dobimo:

$$1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

- Če pa izračunavamo 100% letne obresti neprestano, potem lahko zapišemo:

$$\lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

  kar pa je enako številu $e = 2.718281828456\ldots$

Tako lahko zaključimo, da če imamo na začetku 1 evro in izračunavamo 100% letne obresti neprestano skozi vse leto, bomo na koncu leta dobili $2.718281828456\ldots$ evra.

Pravila za računanje eksponentnih funkcij

Velja:

$$a^0 = 1.$$

Seštevanje in odštevanje eksponentov:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y} = a^{x-y}.$$

Množenje eksponentov:

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$$

1.4.2 Normalna porazdelitev verjetnosti

Kot primer uporabe eksponentne funkcije, bomo obravnavali primer Gaussove krivulje, ki je definirana kot

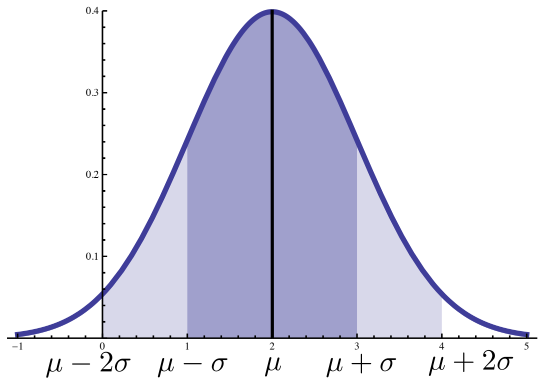
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1.1}$$

Funkcija $f(x)$ predstavlja porazdelitev gostote verjetnosti v primeru Gaussove ali normalne porazdelitve, pri čemer parameter μ predstavlja povprečno vrednost porazdelitve in parameter σ pa standardni odklon. Vrednost σ^2 imenujemo varianca porazdelitve. V primeru, ko sta $\mu = 0$ in $\sigma = 1$, govorimo o standardni normalni porazdelitvi, funkcija pa se spremeni v

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Graf funkcije $f(x)$ je prikazan na sliki 1.18. Graf Gaussove krivulje ima zvonasto obliko, zato takšno krivuljo imenujemo tudi zvonasta krivulja. Krivulja doseže svoj maksimum pri povprečju μ in je simetrična glede na premico $x = \mu$. Standardni odklon σ določa hitrost padanja krivulje. Večji kot je, bolj široka je krivulja oziroma krivulja počasneje pada in obratno, manjša kot je σ, bolj ožja je krivulja oziroma je hitrost padanja krivulje na obe strani večja.

Gaussova krivulja je zelo pomembna krivulja, ker predstavlja običajno porazdelitev verjetnosti naključnih dogodkov. Da razložimo, kaj to pomeni, si bomo pogledali naslednji primer.

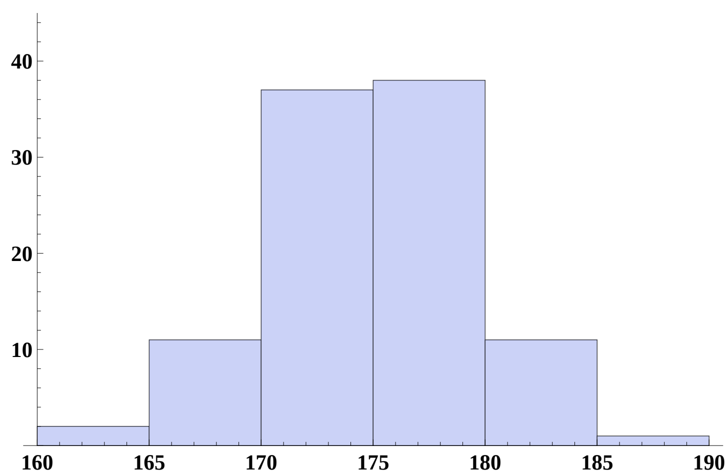


Slika 1.18: Graf Gaussove krivulje.

Denimo, da smo merili višino 100 oseb. V spodnji tabeli je zapisano, koliko oseb je bilo visokih od 160 do 190 cm, kjer smo jih razvrstili v skupine višin na intervale po 5 cm:

višina	160-165	165-170	170-175	175-180	180-185	185-190
število oseb	2	11	37	38	11	1

Tako smo npr. ugotovili, da sta 2 osebi visoki med 160 in 165 cm, 11 oseb med 165 in 175 cm itn. Če izrišemo podatke iz te tabele v obliki stolpcev, kjer višina stolpca predstavlja število oseb določene višine, dobimo graf na sliki 1.19.



Slika 1.19: Histogram višin.

Graf na sliki 1.19, kjer predstavimo pogostnost meritev s stolpci na posameznih intervalih, imenujemo *histogram*.

Tu lahko ugotovimo, da je največ oseb visokih okoli 175 cm, z oddaljevanjem od te vrednosti pa število oseb upada. Tudi običajno je tako, da se večina meritev razporedi okoli neke osrednje vrednosti, bolj kot pa se oddaljujemo od te vrednosti, pa se pogostnost meritev zmanjšuje. To osrednjo vrednost imenujemo povprečje in ga izračunamo kot:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i, \tag{1.2}$$

kjer N predstavlja število vseh meritev, n število intervalov ali kategorij meritev, f_i število meritev znotraj posameznega intervala ali kategorije meritev in x_i vrednost meritve posameznega intervala.

V našem primeru je $N = 100$, $n = 6$, frekvence f_i pa so enake številom oseb po posameznih kategorijah, torej $f_1 = 2$, $f_2 = 11$, $f_3 = 37$, $f_4 = 38$, $f_5 = 11$ in $f_6 = 1$. Ker smo osebe merili z natančnostjo meritev na 5 cm, potem vzamemo za x_i vrednosti, ki so na sredini intervalov, torej $x_1 = 162.5$, $x_2 = 167.5$, $x_3 = 172.5$, $x_4 = 177.5$, $x_5 = 182.5$ in $x_6 = 187.5$. Tako lahko izračunamo:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{100}(2 \cdot 162.5 + 11 \cdot 167.5 + 37 \cdot 172.5 + 38 \cdot 177.5 + 11 \cdot 182.5 + 1 \cdot 187.5) \\ \overline{x} &= 174.9 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Tako je povprečje višin oseb, ki smo jih izmerili, enako 174.9 cm.

Če podatke na združujemo po skupinah, kot smo to storili v zgornjem primeru, potem lahko povprečje izračunamo tako, da seštejemo vse vrednosti podatkov skupaj in jih delimo s številom vseh podatkov:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

To bi v našem primeru pomenilo, da smo sešteli 2 osebi visoki 162.5 cm, 11 oseb visokih 167.5 cm, 37 oseb visokih 172.5 cm itn., s čimer bi dobili enak izraz, kot je zapisan v (1.3).

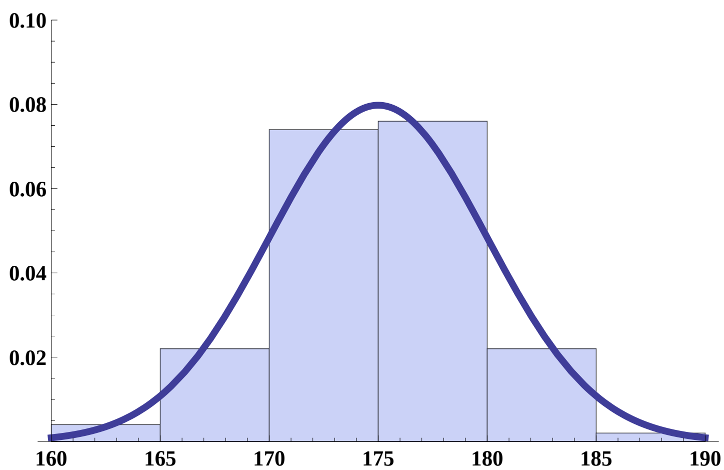
Oblika krivulje pogostnosti meritev pa nam določa, kakšno porazdelitev meritev imamo. Običajno graf porazdelitve meritev ustreza Gaussovi krivulji. V tem primeru govorimo, da so podatki porazdeljeni po Gaussovi ali po normalni porazdelitvi, ki je predstavljena s funkcijo (1.1). Povprečje $\overline{x}$ je v primeru vseh meritev enako parametru μ, potrebno pa je izračunati še parameter σ, ki predstavlja standardni odklon od povprečja. Izračunamo ga iz σ^2, ki jo imenujemo varianca porazdelitve, na naslednji način:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2. \tag{1.4}$$

Parametri izraza so enaki, kot pri primeru izračuna povprečja $\overline{x}$ v (1.2). V primeru posamičnih meritev se izračun variance podobno kot pri povprečju zamenja v:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2,$$

kjer x_i predstavlja vrednosti posamičnih meritev in ne skupine meritev, kot je to v primeru (1.4).



Slika 1.20: Gaussova porazdelitev na podatkih meritev višine.

V našem primeru lahko izračunamo varianco iz formule (1.4):

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{99}(2\cdot(162.5-174.9)^2 + 11\cdot(167.5-174.9)^2 + 37\cdot(172.5-174.9)^2 + \\
&+ 38\cdot(177.5-174.9)^2 + 11\cdot(182.5-174.9)^2 + 1\cdot(187.5-174.9)^2) \\
\sigma^2 &= 21.9596
\end{aligned}$$

Varianca je torej enaka $\sigma^2 = 21.9596$, iz česar izračunamo standardni odklon

$$\sigma = \sqrt{21.9596} = 4.68611.$$

Standardni odklon v bistvu meri povprečen odklon podatkov od povprečne vrednosti. Če vstavimo izračunano povprečje $\mu = 174.9$ in standardni odklon

$\sigma = 4.68611$ v Gaussovo funkcijo (1.1) in izrišemo graf Gaussove krivulje na naših meritvah, dobimo sliko 1.20.

Standardni odklon oziroma varianca nam povesta, kako so podatki razpršeni okoli povprečne vrednosti. Večja kot sta, večja je razpršenost. Standardni odklon v primeru Gaussove porazdelitve tudi pove, da lahko pričakujemo na intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ 68% vseh meritev, na intervalu $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 95% vseh meritev in na intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ že 99.7% meritev. To je shematično prikazano na grafu Gaussove krivulje na sliki 1.18.

1.4.3 Logaritemska funkcija

Inverzna funkcija eksponentne funkcije je logaritemska funkcija. Zapišemo jo kot

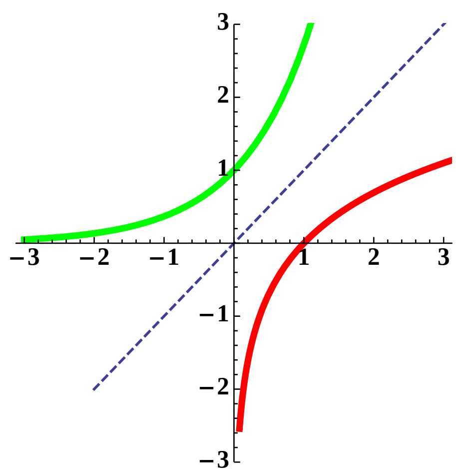
$$f(x) = \log_a x, \qquad (a > 0, a \neq 1).$$

Število a predstavlja osnovo logaritma, funkcija pa je definirana samo za pozitivne x. V primeru, ko je a enako številu e, zapišemo:

$$f(x) = \ln x$$

in govorimo o naravnem logaritmu.

Na sliki 1.21 sta prikazani funkciji e^x in $\ln x$ Funkcija $\ln x$ je inverzna funkcija funkcije e^x in jo dobimo, če funkcijo e^x preslikamo preko premice $y = x$.



Slika 1.21: Inverzna funkcija funkcije e^x (svetla, zelena krivulja) je $\ln(x)$ (temna, rdeča krivulja).

Funkcijo logaritma lahko razložimo preko definicije inverza eksponentne funkcije. Pri logaritmu $y = \log_a x$ računamo takšen y, da bo veljalo $a^y = x$. Tako lahko hitro ugotovimo, da velja $a^{\log_a x} = x$. Velja še

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{in} \quad \log_a a = 1,$$

ker je $a^0 = 1$ in $a^1 = a$. Logaritem $\log_a 0$ ne obstaja, saj ne obstaja nobeno število y, da bo $a^y = 0$, oziroma lahko zapišemo, da je v tem primeru $\log_a 0$ enak $-\infty$ v primeru, ko je $a > 0$, kar je razvidno iz slike 1.21.

Ostala pravila za izračun logaritmov so podana v nadaljevanju.
Sprememba logaritma produkta v vsoto logaritmov in logaritma kvocienta v razliko logaritmov:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Logaritem potence:

$$\log_a x^n = n \log_a x, \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Če velja $a^y = x$ in $b^z = x$, potem velja, da je $y = \log_a x$ in $z = \log_b x$. Po drugi strani pa velja:

$$\begin{aligned}
a^y &= b^z \\
a^{\log_a x} &= b^{\log_b x}, \quad \text{če logaritmiramo obe strani z } \log_a \\
\log_a a^{\log_a x} &= \log_a b^{\log_b x} \\
\log_a x \log_a a &= \log_b x \log_a b \\
\log_a x &= \log_a b \log_b x
\end{aligned}$$

S tem pa smo tudi podali zvezo med logaritmi z različnimi osnovami, torej:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Primer 12

Izračunaj $\ln \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$:

$$\begin{aligned} &\ln \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \ln\left(3x^2\sqrt[3]{y}\right) - \ln\left(2zu^3\right) = \\ &= \ln 3 + 2\ln x + \frac{1}{3}\ln y - \ln 2 - \ln z - 3\ln u \end{aligned}$$

Primer 13

Pokaži, da za spremembo osnove eksponentne funkcije velja:

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

To lahko pokažemo tako, da se vprašamo, kakšen mora biti y, da velja $a^x = e^y$:

$$\begin{aligned} a^x &= e^y, \quad \text{če logaritmiramo obe strani z ln} \\ x\ln a &= y \ln e \\ x \ln a &= y \end{aligned}$$

Torej je $y = x\ln a$, pri čemer je $e^y = a^x$, zato velja $e^{x\ln a} = a^x$.

1.4.4 Model spreminjanja populacije

Model naraščanja ali upadanja populacije lahko zapišemo kot

$$P = P_0(1+r)^t,$$

kjer:

- P predstavlja populacijo po določenem času t.
- P_0 predstavlja začetno populacijo.
- r predstavlja delež prirastka ali zmanjšanja populacije v nekem časovnem obdobju.

- t je čas, v katerem izračunamo populacijo P.

Seveda ta model lahko uporabimo ne samo za populacije, ampak tudi za ostale sisteme, ki se obnašajo po tem principu: npr. za izračun obresti, za naraščanje ali upadanje proizvodnje, povečevanje ali upadanje prodaje, bruto domačega proizvoda, naravnih dobrin ipd.

V naslednjih primerih podajamo nekaj zgledov uporabe tega modela.

Primer 14

Denimo, da je v nekem mestu leta 2012 število ljudi 250,342. Nadalje predpostavimo, da je ocenjena vrednost letnega priprastka števila ljudi 1.2%.

1. Koliko ljudi bo v mestu živelo čez 5 let?

   V tem primeru je $P_0 = 250342$, $r = 0.012$ in $t = 5$. Torej izračunamo

   $$P = P_0(1+r)^t = 250342(1+0.012)^5 = 265727$$

   Čez pet let bo torej v mestu živelo 15,727 več ljudi kot sedaj.

2. Kdaj bo v mestu ob nespremenjenih pogojih naraščanja populacije živelo 300,000 ljudi?

   V tem primeru imamo podano $P = 300000$, $P_0 = 250342$ in $r = 0.012$. Izračunati moramo čas, torej t. Naredimo to za splošni primer:

   $$\begin{aligned} P &= P_0(1+r)^t, \quad \text{če logaritmiramo obe strani z ln} \\ \ln P &= \ln P_0(1+r)^t \\ \ln P &= \ln P_0 + t\ln(1+r) \\ t &= \frac{\ln P - \ln P_0}{\ln(1+r)}. \end{aligned}$$

V našem primeru je:

$$t = \frac{\ln P - \ln P_0}{\ln(1+r)} = \frac{\ln 300000 - \ln 250342}{\ln(1+0.012)}$$
$$= \frac{12.6115 - 12.4306}{\ln 1.012} = 15.1698$$

Torej čez približno 15 let lahko pričakujemo 300,000 ljudi v mestu.

3. Kolikšen mora biti letni prirastek, da se populacija v 10-ih letih podvoji?

   V tem primeru imamo podano $P = 2P_0$, P_0 in $t = 10$. Izračunati moramo letni prirastek r.

$$\begin{aligned}
P &= P_0(1+r)^t \\
2P_0 &= P_0(1+r)^1 0 \\
2 &= (1+r)^1 0, \quad \text{če logaritmiramo obe strani z ln} \\
\ln(2) &= 10\ln(1+r) \\
\ln(1+r) &= \frac{1}{10}\ln 2 \quad \text{če eksponenciramo z } e^x \\
1+r &= e^{\frac{1}{10}\ln 2} \\
r &= e^{\frac{1}{10}\ln 2} - 1 = 2^{\frac{1}{10}} - 1 \approx 0.07 = 7\%
\end{aligned}$$

   Torej, v primeru 7% prirastka na leto, se v desetih letih populacija podvoji. To velja tudi za druge sisteme, npr. če se potrošnja surovin na leto poveča za 7%, jih bomo potrebovali v desetih letih še enkrat več. Ali pa npr., če je potrebno povečati proizvodnjo zdravil za 7% na leto, bomo čez 10 let izdelovali še enkrat več zdravil kot danes.

Model naraščanja ali upadanja populacije, ki smo ga uporabljali v prejšnjih primerih, predstavlja posebno obliko modela, ki ga v splošnem zapišemo z eksponentno funkcijo na naslednji način:

$$P = P_0 e^{kt}. \tag{1.5}$$

Ta model lahko izpeljemo iz diferencialne enačbe:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P,$$

kjer $\frac{dP}{dt}$ predstavlja spremembo populacije P po času t (simbol $\frac{dP}{dt}$ bomo sicer spoznali v nadaljevanju pri diferencialnem računu), izraz $k \cdot P$ pa predstavlja delež populacije. Zgornja diferencialna enačba nam torej pove, da se populacija P spreminja po času t s konstantnim deležem k od populacije P. Rešitev zgornje enačbe je splošni model spreminjanja populacije v (1.5). Parametri modela (1.5) pomenijo podobno kot prej: P predstavlja populacijo, ki se spreminja po času t, P_0 predstavlja začetno populacijo in k delež prirastka ali zmanjšanja populacije v nekem časovnem obdobju.

Primer 15

Kakšna je zveza med deležem populacije k in r, ki smo ga uporabili v modelu $P = P_0(1+r)^t$?

Ker velja:

$$\begin{aligned} P_0(1+r)^t = \quad & P && = P_0 e^{kt} \\ (1+r)^t \quad & = && e^{kt}, \quad \text{če logaritmiramo obe strani z ln} \\ t\ln(1+r) \quad & = && kt\ln(e) \\ \ln(1+r) \quad & = && k, \end{aligned}$$

potem je

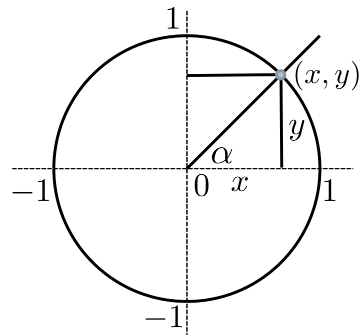
$$\boxed{k = \ln(1+r)}$$

1.5 Trigonometrične funkcije

Trigonometrične ali kotne funkcije podajajo razmerja med dolžinami stranic v odvisnosti od kotov v pravokotnem trikotniku. Sinus kota poda razmerje med dolžino nasprotne katete glede na kot in hipotenuze v pravokotnem trikotniku, kosinus kota poda razmerje med dolžino priležne katete kota in hipotenuzo, tangens kota pa predstavlja razmerje med dolžinama nasprotne in priležne katete v pravokotnem trikotniku.

Geometrijsko lahko definiramo kotne funkcije tudi na enotski krožnici v koordinatnem sistemu (x, y), kot je to prikazano na sliki 1.22.

Enotska krožnica predstavlja krožnico s polmerom 1 v koordinatnem sistemu s središčem v središču krožnice. Kot α predstavlja kot med abscisno osjo in premico, ki gre skozi koordinatno izhodišče in točko (x, y) na enotski krožnici,



Slika 1.22: Enotska krožnica za definicije kotnih funkcij v koordinatnem sistemu (x, y).

kot je to prikazano na sliki 1.22. V tem primeru lahko definiramo sinus, kosinus in tangens kota α kot:

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}.$$

Ker je enotska krožnica definirana implicitno z enačbo $x^2 + y^2 = 1$, tako velja tudi $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Velja pa tudi $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Kote v trigonometriji izražamo v kotnih ali ločnih merah. Kotna mera je določena z razdelitvijo kroga na 360 enakih delov. Enota za kotno mero je stopinja, šestdeseti del stopinje je minuta, šestdeseti del minute pa sekunda. Ločna mera pa je definirana kot razmerje med dolžino krožnega loka in polmerom krožnice pri danem kotu. Enota je radian. To pomeni, da predstavlja enkratni obhod krožnice s polmerom r kot $360°$ oziroma kot $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ merjen v radianih. Iz tega pa dobimo zvezo med koti podanimi v stopinjah in radianih, saj velja, da $360°$ ustreza 2π radianom oziroma $180°$ ustreza π radianom. Iz tega lahko izračunamo splošno zvezo:

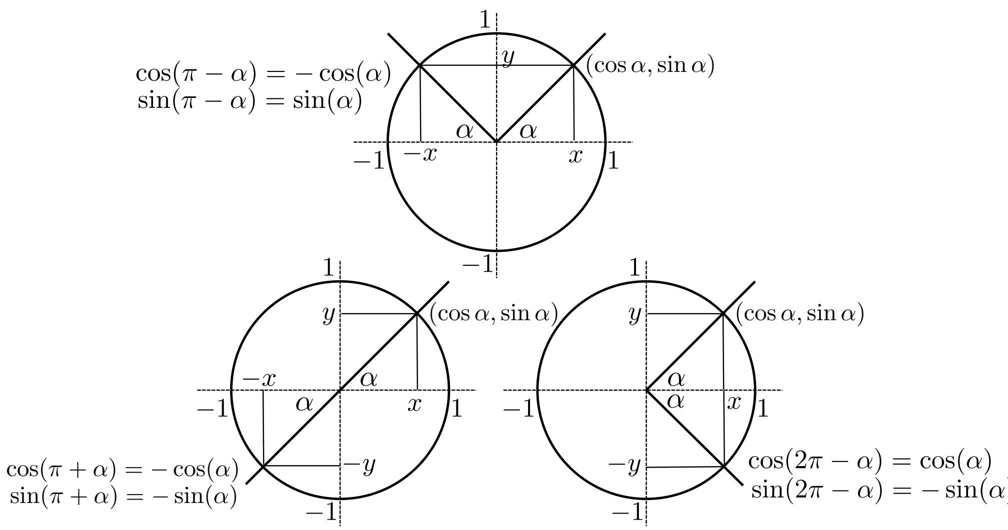
$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\alpha^{rad} \quad \text{ali} \quad \alpha^{rad} = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ,$$

kjer je α° kot merjen v stopinjah in α^{rad} kot merjen v radianih.

V nadaljevanju podajamo nekaj vrednosti kotnih funkcij za kote med $0°$ in $90°$:

kot	kot v rad	sin	cos	tan
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$

Koti med 0° in 90° ustrezajo vrednostim kotnih funkcij v prvem kvadrantu koordinatnega sistema z enotsko krožnico. Na podlagi teh vrednosti lahko izračunamo tudi vrednosti kotnih funkcij ostalih kotov med 90° in 360°, kot je to prikazano na sliki 1.23.



Slika 1.23: Izračun vrednosti kotnih funkcij kotov med 90° in 360° na podlagi znanih vrednosti kotnih funkcij kotov med 0° in 90°.

Če poznamo $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$ kota iz prvega kvadranta koordinatnega sistema, torej če velja $0° \leq \alpha \leq 90°$ in je $x = \cos\alpha$ in $y = \sin\alpha$, potem velja:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

za kote v drugem kvadrantu, kot je to prikazano na sliki 1.23 zgoraj; nadalje velja:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

za kote v tretjem kvadrantu, kot je to prikazano na sliki 1.23 levo spodaj; in še:

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

za kote v četrtem kvadrantu, kar je prikazano na sliki 1.23 desno spodaj.

Primer 16

Izračunaj:

- $\cos(120°)$:

$$\cos(120°) = \cos(180° - 60°) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

- $\sin(210°)$:

$$\sin(210°) = \sin(180° + 30°) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

- $\tan(315°)$:
  Ker velja $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, najprej izračunamo $\sin(315°)$ in $\cos(315°)$ ter nato $\tan(315°)$:

$$\begin{aligned}
\sin(315°) &= \sin(360° - 45°) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos(315°) &= \cos(360° - 45°) = \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\tan(315°) &= \frac{\sin(315°)}{\cos(315°)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1
\end{aligned}$$

Funkcija sinus

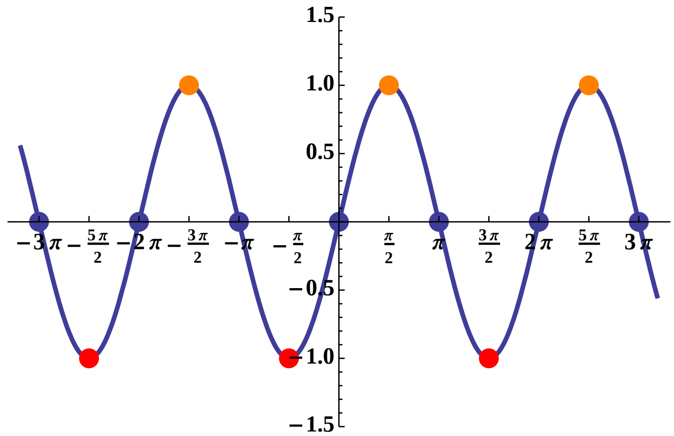
Graf funkcije $f(x) = \sin(x)$ je prikazan na sliki 1.24. V tem primeru podajamo kote x v radianih.

Funkcija $\sin(x)$ je periodična funkcija s periodo 2π radianov. Perioda 2π predstavlja ravno en obhod enotske krožnice, zato so po vsakem takem obhodu vrednosti sinusa enake, kar lahko zapišemo kot

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi) \quad \text{za } k \in \mathbb{Z}.$$

Ničle funkcije $\sin(x)$ so v točkah $\ldots, -3\pi, -2\pi, \pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, kar lahko zapišemo krajše s $k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Med ničlami sinusa so maksimumi in minimumi, ki si izmenično sledijo. Maksimalne vrednosti funkcije $\sin(x)$, ki znašajo $+1$, so dosežene v točkah $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, kar zapišemo krajše z $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$.

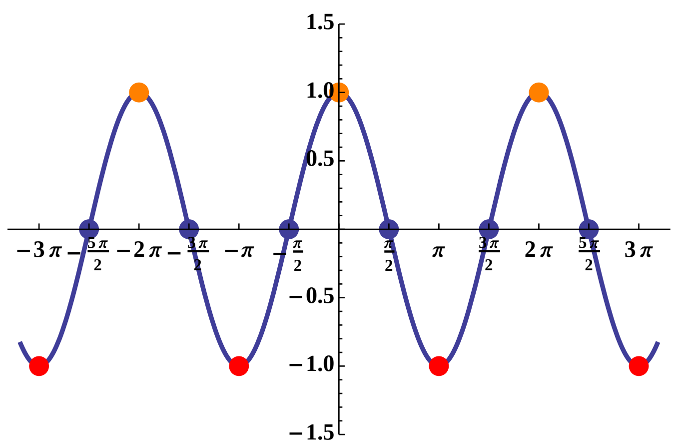


Slika 1.24: Graf funkcije $\sin(x)$ s pripadajočimi ničlami, maksimumi in minimumi.

Vrednosti minimumov funkcije $\sin(x)$ so -1 in so dosežene v točkah $\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, kar zapišemo krajše z $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija kosinus

Graf funkcije $f(x) = \cos(x)$ je prikazan na sliki 1.25. Tudi v tem primeru so koti x podani v radianih.



Slika 1.25: Graf funkcije $\cos(x)$ s pripadajočimi ničlami, maksimumi in minimumi.

Tudi funkcija $\cos(x)$ je periodična funkcija s periodo 2π radianov. Zaradi enakega razloga kot pri funkciji sinus perioda 2π predstavlja ravno en obhod enotske krožnice, zato so po vsakem takem obhodu vrednosti kosinusa ponovijo, kar lahko zapišemo kot

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \quad \text{za } k \in \mathbb{Z}.$$

Ničle funkcije $\cos(x)$ so v točkah $\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$, kar lahko zapišemo krajše s $(k + \frac{1}{2})\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Med ničlami kosinusa so maksimumi in minimumi, ki si izmenično sledijo. Maksimalne vrednosti funkcije $\cos(x)$ znašajo tako kot pri sinusu $+1$ in so dosežene v točkah $\ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$, kar zapišemo krajše z $2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$.

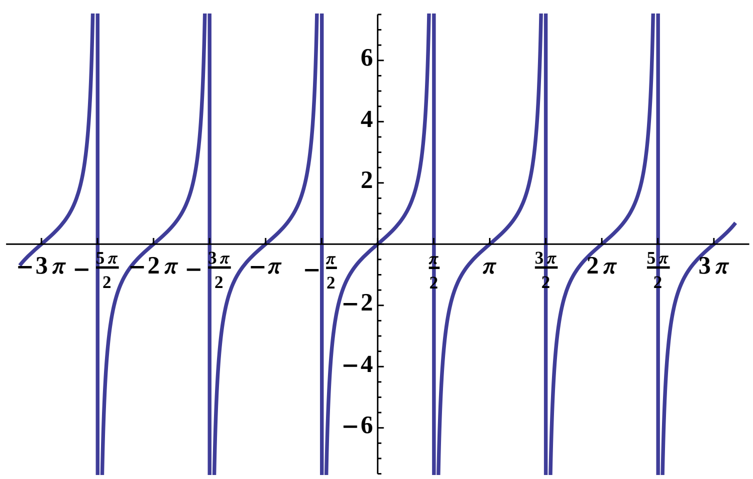
Vrednosti minimumov funkcije $\cos(x)$ so -1 in so dosežene v točkah $\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$, kar zapišemo krajše z $(2k+1)\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija $\cos(x)$ ima povsem enake lastnosti kot funkcija $\sin(x)$, le da so ničle, maksimumi in minimumi premaknjeni za konstantno vrednost $\frac{\pi}{2}$. Tako lahko zapišemo, da velja:

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}).$$

Funkcija tangens

Graf funkcije $f(x) = \tan(x)$ je prikazan na sliki 1.26.



Slika 1.26: Graf funkcije $\tan(x)$.

Ker velja $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, so lastnosti funkcije $\tan(x)$ odvisne od lastnosti funkcij sinusa in kosinusa. Ničle funkcije $\tan(x)$ so tako dosežene pri ničlah funkcije $\sin(x)$, v ničlah $\cos(x)$ pa ima funkcija $\tan(x)$ pole. Perioda funkcije je pol manjša kot pri funkcijah sinus in kosinus in znaša π. Tako velja:

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi) \qquad \text{za } k \in \mathbb{Z}.$$

Ničle so tako dosežene pri $k\pi$, poli pa pri $(k + \frac{1}{2})\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Nekatere zveze med kotnimi funkcijami

Pokazali smo že, da velja

$$\sin^x + \cos^2 x = 1 \quad \text{in} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Veljata še adicijska izreka:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

in

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Primer 17

- Izračunaj $\sin 2x$:

$$\sin 2x = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

- Izračunaj $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

- Izračunaj $\tan 2x$.
  Velja:

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}.$$

Če iz zveze $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ izrazimo $\sin x = \tan x \cos x$ in vstavimo v zgornjo zvezo. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}\tan 2x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\\ &= \frac{2\tan x\cos x\cos x}{\cos^2 x - \tan^2 x\cos^2 x}\\ &= \frac{2\tan x\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\tan^2 x)}\\ &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

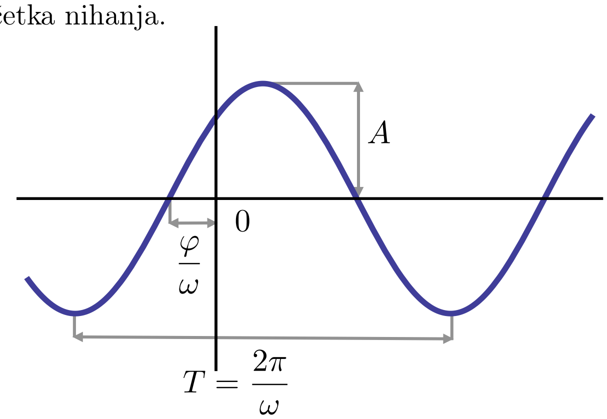
1.5.1 Izris trigonometričnih funkcij

V splošnem lahko zapišemo trigonometrično funkcijo kot

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

S to zvezo pa lahko opišemo tudi potek nihanja matematičnega nihala. V tem primeru imenujemo:

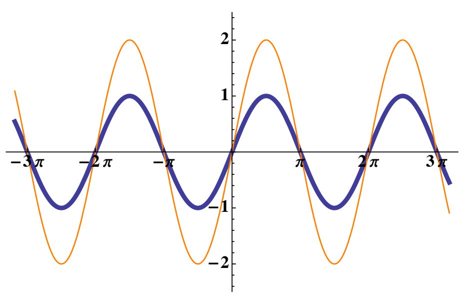
- A - amplitudo nihanja, ki predstavlja največji odmik nihala od ravnovesne lege,
- ω - krožno frekvenco nihanja, ki definira periodo ali valovno dolžino nihanja, ki znaša $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
- φ - fazni začetek ali fazni zamik, ki predstavlja odmik od ravnovesne lege začetka nihanja.

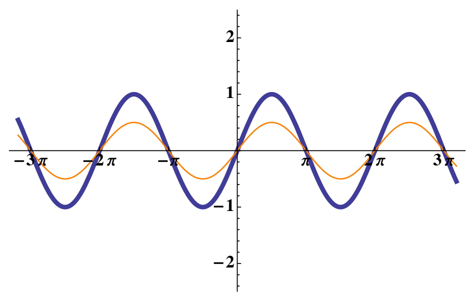


Slika 1.27: Harmonično nihanje.

Kaj pomenijo posamezni parametri funkcije $f(t)$, predstavljeno na sliki 1.27.

S parametrom A vplivamo na velikost amplitude sinusnega nihanja. Večji kot je, večja je amplituda in obratno, manjši kot je, manjša je amplituda. To je prikazano na sliki 1.28. V primeru na sliki primerjamo graf funkcije $\sin(t)$ z grafom $2\sin(t)$ na sliki levo in z grafom funkcije $0.5\sin(t)$ na sliki desno. V prvem primeru se amplituda osnovnega sinusa dvakrat poveča, torej so maksimalne in minimalne vrednosti 2-krat večje od maksimumov oziroma 2-krat manjše od minimumov osnovnega sinusa. Podobno je v primeru $0.5\sin(t)$, le da se tu absolutne vrednosti maksimumov in minimumov za polovico zmanjšajo.

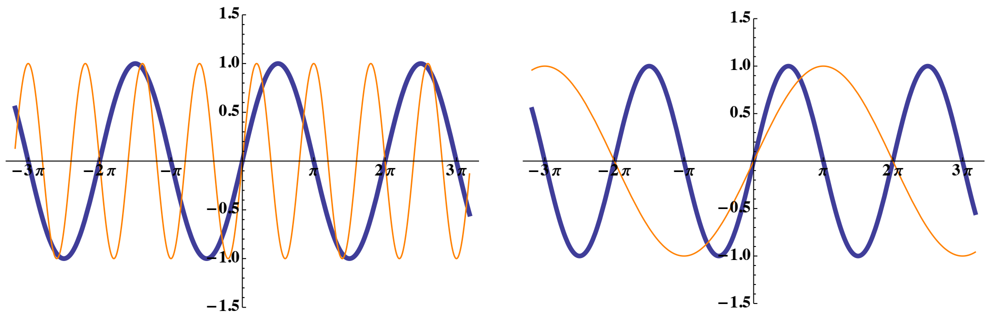




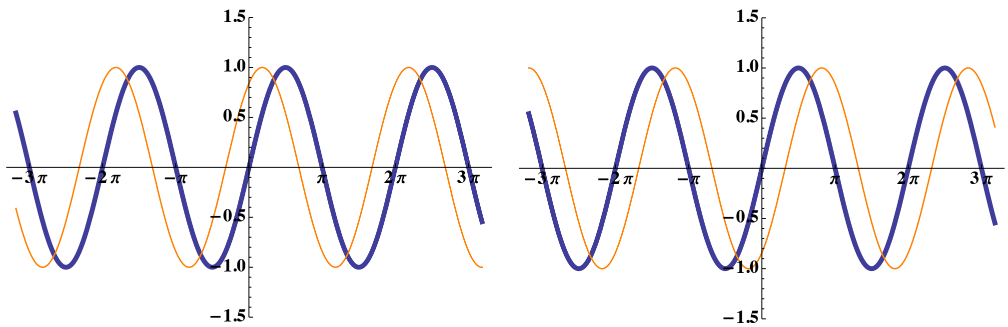
Slika 1.28: Vpliv amplitude na nihanje: levo je $2\sin(t)$ (svetlejši graf), desno $0.5\sin(t)$ (svetlejši graf) v primerjavi s $\sin(t)$ (temnejši graf na obeh slikah).

S krožno frekvenco ω vplivamo na širjenje oziroma krčenje osnovnega sinusnega nihanja po časovni osi. Večja kot je ω, bolj se sinusno nihanje krči, kar pomeni, da se perioda nihanja manjša, oziroma da se frekvenca nihanja poveča. Manjša kot je ω, bolj se sinusno nihanje po času širi, kar pomeni, da je perioda večja in frekvenca nihanja manjša. V primeru na sliki 1.29 primerjamo osnovno funkcijo $\sin(t)$ s funkcijama $\sin(2.5t)$ in $\sin(0.5t)$. V prvem primeru je torej $\omega = 2.5$, v drugem pa $\omega = 0.5$. V primeru $\sin(2.5t)$ se graf nihanja skrči za 2.5-krat v primerjavi z grafom $\sin(t)$, v primeru $\sin(0.5t)$ pa se graf funkcije razširi za 2-krat v primerjavi z grafom $\sin(t)$.

S parametrom φ vplivamo na premikanje osnovnega sinusnega nihanja desno ali levo po časovni osi. Če je parameter φ pozitiven, se graf osnovnega nihanja premakne za vrednost φ v levo, če pa je negativen, se graf premakne za vrednost φ v desno. To je prikazano tudi na sliki 1.30, kjer je prikazana primerjava med funkcijami $\sin(t)$ in $\sin(t+1)$ ter $\sin(t-1)$. V primeru $\sin(t+1)$ se je graf osnovne funkcije $\sin(t)$ premaknil za 1 v levo, v primeru $\sin(t-1)$ pa se je graf osnovne funkcije $\sin(t)$ premaknil za 1 v desno.



Slika 1.29: Vpliv krožne frekvence ω na nihanje: levo je $\sin(2.5t)$ (svetlejši graf), desno pa $\sin(0.5t)$ (svetlejši graf) v primerjavi s $\sin(t)$ (temnejši graf na obeh slikah).



Slika 1.30: Vpliv faznega premika φ na nihanje: levo je $\sin(t+1)$ (svetlejši graf), desno pa $\sin(t-1)$ (svetlejši graf) v primerjavi s $\sin(t)$ (temnejši graf na obeh slikah).

Izris grafa funkcije $A\sin(\omega t + \varphi)$

Izris grafa funkcije $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ lahko izvedemo na več načinov. Kot smo lahko spoznali, nam posamezni parametri funkcije $f(t)$ določijo, kako se spreminja osnovna funkcija sinusa $\sin(t)$. Na podlagi tega znanja bi lahko osnovno funkcijo $\sin(t)$ postopno preoblikovali do končne funkcije $A\sin(\omega t + \varphi)$ s premikanjem, krčenjem ali širjenjem po časovni osi in raztezanjem ali krčenjem po amplitudi.

V nadaljevanju pa si bomo pogledali drugi način izrisa grafa s pomočjo znanih lastnosti funkcije $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Denimo, da želimo izrisati graf funkcije $f(t) = 2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$. To je primer funkcije $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, kjer je $A = 2$, $\omega = \pi$ in $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ker gre za sinusno nihanje, lahko predpostavimo, da bo končni graf vseboval ničle, maksimume in minimume. Zaradi amplitude $A = 2$ bodo vrednosti maksimumov 2, vrednosti minimumov pa -2.

Določimo najprej ničle funkcije $f(t)$:

$$2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2}) \;=\; 0$$

Ker so ničle sinusa dosežene pri $k\pi$, potem velja:

$$\begin{aligned} \pi t + \frac{\pi}{2} &= k\pi \\ t + \frac{1}{2} &= k \\ t &= k - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Poiščemo še maksimume:

$$2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2}) \;=\; 2$$

Ker so maksimumi sinusa doseženi pri $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, potem velja:

$$\begin{aligned} \pi t + \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ t + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + 2k \\ t &= 2k \end{aligned}$$

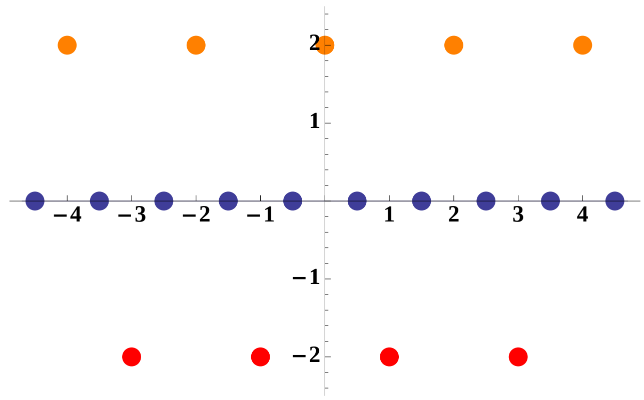
Poiščemo še minimume:

$$2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2}) \;=\; -2$$

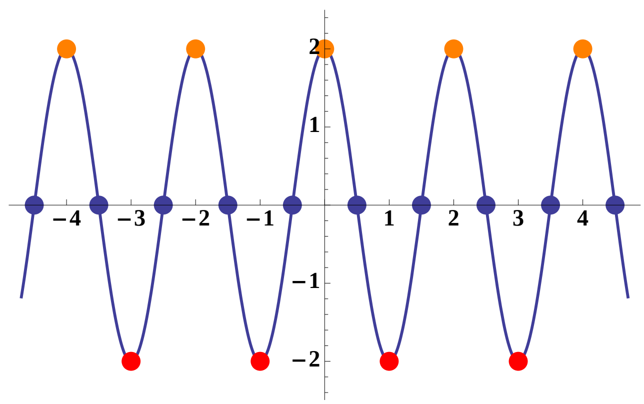
Ker so minimumi sinusa doseženi pri $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, potem velja:

$$\begin{aligned} \pi t + \frac{\pi}{2} &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ t + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} + 2k \\ t &= 2k + 1 \end{aligned}$$

Ko izračunamo ničle, maksimume in minimume, vse skupaj izrišemo na graf, ki je prikazan na sliki 1.31.



Slika 1.31: Določitev ničel, maksimumov in minimumov funkcije $f(t) = 2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$.



Slika 1.32: Izris funkcije $f(t) = 2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$, ki gre skozi pripadajoče ničle, maksimume in minimume.

Ko imamo narisane ničle, maksimume in minimume, je potrebno vse skupaj samo povezati s sinusno obliko funkcije, kar je prikazano na sliki 1.32.

To pa je tudi končni izris grafa funkcije $f(t) = 2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$.

Poglejmo še dva primera:

Primer 18

Poišči rešitve $2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ na intervalu $[-1, 1]$.

Graf funkcije $f(t) = 2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ smo narisali na sliki 1.32. Iz slike lahko razberemo, da je $f(t) = 1$ na intervalu $[-1, 1]$ med dvema ničlama, ki so v točkah $t_1 = -\frac{1}{2}$ in $t_2 = \frac{1}{2}$. Izračunajmo ti dve točki:

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ker velja:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{za } k \in \mathbb{Z},$$

lahko obravnavamo oba primera:

1.

$$\begin{aligned} \pi t + \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ t + \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} + 2k \\ t &= \frac{1}{6} + 2k - \frac{1}{2} \\ t &= -\frac{1}{3} + 2k \\ \text{Možne rešitve } t &= \ldots, -2\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \ldots \end{aligned}$$

Na intervalu $[-1, 1]$ je samo rešitev $-\frac{1}{3}$.

2.

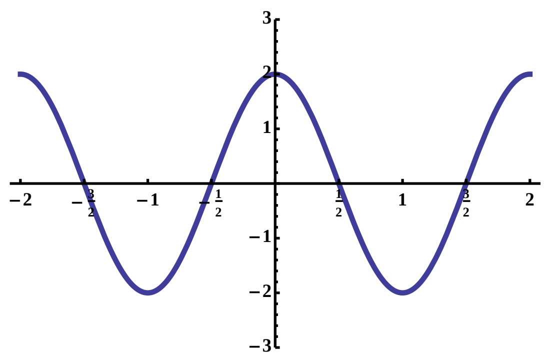
$$\begin{aligned} \pi t + \frac{\pi}{2} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ t + \frac{1}{2} &= \frac{5}{6} + 2k \\ t &= \frac{5}{6} + 2k - \frac{1}{2} \\ t &= \frac{1}{3} + 2k \\ \text{Možne rešitve } t &= \ldots, -1\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}, \ldots \end{aligned}$$

Na intervalu $[-1, 1]$ je samo rešitev $\frac{1}{3}$.

Primer 19

Kako iz grafa harmoničnega nihanja $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ določimo parametre A, ω in φ?

Poglejmo primer grafa harmoničnega nihanja:



Amplituda nihanja na sliki je 2, torej je $A = 2$. Perioda nihanja je $T = 2$. Ker velja $T = \frac{2\pi}{\omega}$, lahko izračunamo, da je krožna frekvenca $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Izračunati je potrebno še fazni zamik φ. Tega lahko določimo iz ničel. Iz grafa lahko določimo ničle nihanja v točkah $\ldots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, oziroma pri $t = -\frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Po drugi strani pa vemo, da so ničle funkcije sin v točkah $k\pi$. Torej velja:

$$\begin{aligned}
\omega t + \varphi &= k\pi \\
\pi(-\frac{1}{2} + k) + \varphi &= k\pi \\
-\frac{\pi}{2} + k\pi + \varphi &= k\pi \\
-\frac{\pi}{2} + \varphi &= 0 \\
\varphi &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Torej se enačba harmoničnega nihanja na sliki lahko zapiše kot:

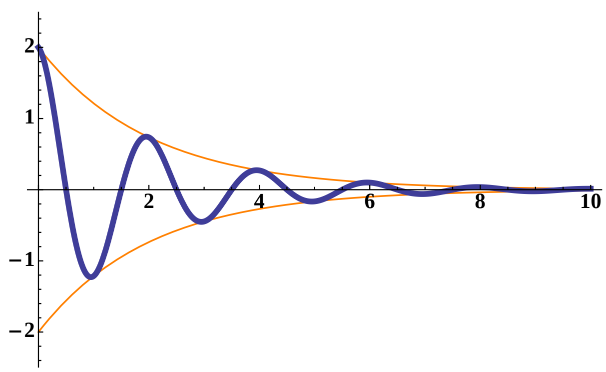
$$f(t) = 2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2}).$$

1.5.2 Dušeno nihanje

Harmonično nihanje iz prejšnjega poglavja je samo teoretičen model nihanja, saj se takšno nihanje nikoli ne ustavi, kar pa vemo, da ni mogoče. Običajno je tako, da se po nekem času nihanje zaustavi zaradi različnih dejavnikov, ki to nihanje zavirajo. Tako je boljši model nihanja opisan z naslednjo funkcijo:

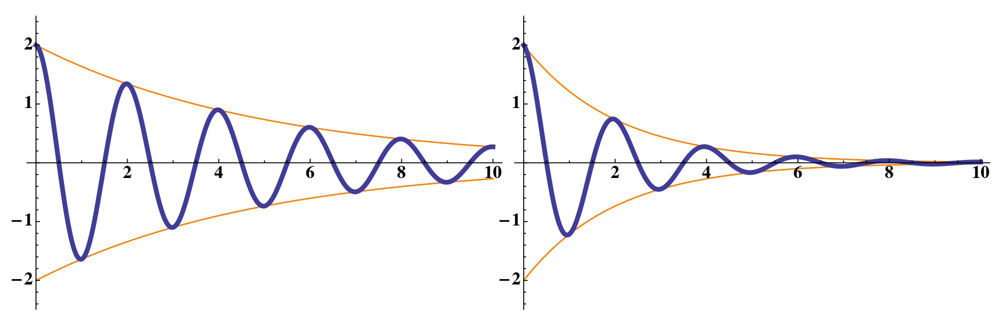
$$f(t) = Ae^{-at}\sin(\omega t + \varphi),$$

pri čemer velja, da sta a in t pozitivna. Graf takšnega nihanja je prikazan na sliki 1.33.



Slika 1.33: Dušeno nihanje.

Takšnemu nihanju, kjer se amplituda nihanja asimptotično približuje 0, pravimo *dušeno nihanje*. Hitrost padanja je določena s parametrom a. Večji kot je a, hitreje amplituda nihanja pada proti 0. To je prikazano na sliki 1.34. Zato temu parametru pravimo tudi koeficient dušenja nihanja.



Slika 1.34: Spreminjanje kooeficienta dušenja vpliva na hitrost pojemanja nihanja. Na levi sliki je koeficient dušenja manjši, kot je na desni sliki.

Vse ostale lastnosti ostanejo enake kot pri harmoničnem nihanju. Ničle nihanja so določene s sinusno funkcijo enako kot prej, položaj maksimumov in minimumov ravno tako določa funkcija sinus, le velikost maksimumov in minimumov je določena po krivulji Ae^{-at}, kar je prikazano s svetlejšo črto na grafih 1.33 in 1.34.

2. Diferencialni račun

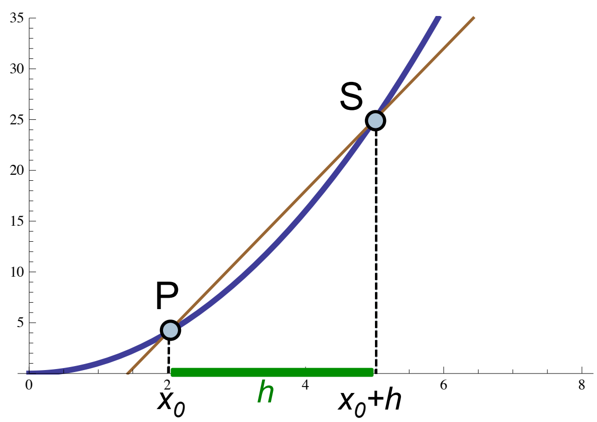
2.1 Odvod funkcije

Z odvodom funkcije merimo hitrost spremembe funkcije v dani točki. Če v dani točki funkcija narašča, je vrednost odvoda pozitivna, če funkcija pada, pa je vrednost odvoda negativna. Vrednost odvoda je velika v pozitivno oziroma v negativno smer, če funkcija v dani točki strmo narašča oziroma pada.

Odvod funkcije lahko definiramo s pomočjo diferenčnega koeficienta funkcije v dani točki. Diferenčni koeficient funkcije $f(x)$ v dani točki x_0 je:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

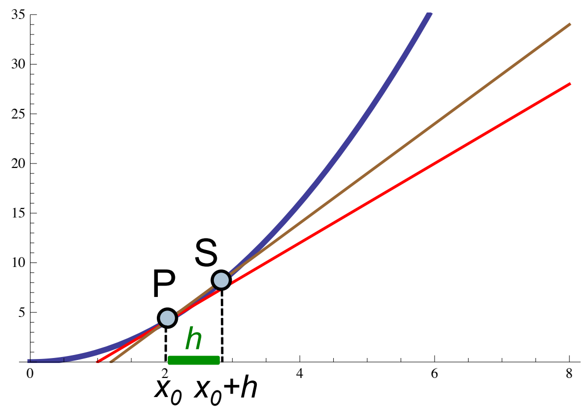
Diferenčni koeficient predstavlja smerni koeficient premice sekante funkcije $f(x)$, ki gre skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0+h, f(x_0+h))$, kot je to prikazano na sliki 2.1.



Slika 2.1: Premica sekanta funkcije $f(x)$ skozi točki $P(x_0, f(x_0))$ in $S(x_0+h, f(x_0+h))$.

Smerni koeficient premice, ki gre skozi točki $P(x_0, f(x_0))$ in $S(x_0+h, f(x_0+h))$ na sliki 2.1, lahko izračunamo kot $k_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, kar je enako diferenčenmu koeficientu.

Če h manjšamo, se manjša tudi razdalja med točkama P in S. Kar pomeni, da se sekanta funkcije $f(x)$ skozi ti dve točki vse bolj približuje premici tangente skozi točko P, kot je to prikazano na sliki 2.2.



Slika 2.2: Ko se manjša h, se premica sekanta skozi točki $P(x_0, f(x_0))$ in $S(x_0+h, f(x_0+h))$ približuje premici tangente v točki $P(x_0, f(x_0))$.

Ko gre $h \to 0$, lahko diferenčni kvocient zapišemo kot:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

in to imenujemo odvod funkcije $f(x)$ v točki x_0. Običajno ga označimo z $f'(x_0)$. Odvod v poljubni točki x funkcije $f(x)$ tako lahko zapišemo kot:

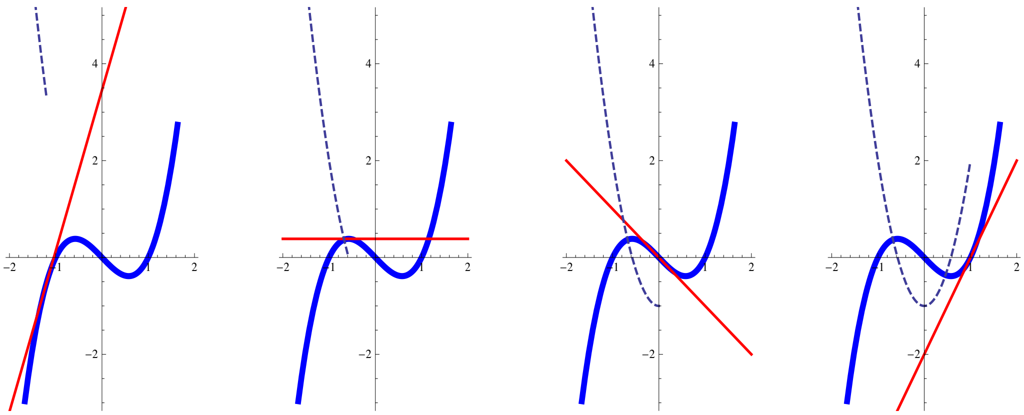
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Odvode lahko še označujemo z

$$f'(x), \quad Df(x), \quad \frac{df(x)}{dx},$$

definicija odvoda pa je v vseh primerih enaka.

Na sliki 2.3 je prikazan odvod v različnih točkah funkcije $f(x) = x^3 - x$. Prikazan je graf funkcije $f(x)$ (s polno črto), odvod funkcije $f'(x)$ (s prekinjeno črto) in premica tangente v točkah izračuna odvoda. Odvod je izračunan v točkah $-1.2, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0$ in 1. Kot lahko vidimo na sliki 2.3, je vrednost odvoda

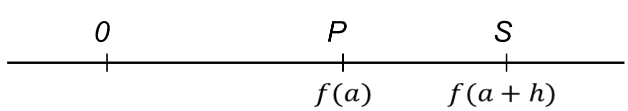


Slika 2.3: Prikaz odvoda v različnih točkah funkcije $f(x) = x^3 - x$.

pozitivna tam, kjer funkcija narašča in negativna, kjer funkcija pada. Hitreje kot funkcija narašča, večje so vrednosti odvoda (večji je smerni koeficient tangente). Enako velja tudi za padanje funkcije, vendar so vrednosti odvoda negativne. Posebej je potrebno poudariti, da je vrednost odvoda v točki $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (druga slika na sliki 2.3), kjer funkcija $f(x)$ doseže lokalni maksimum, enaka 0 (smerni koeficient tangente v tej točki je 0 - premica je vodoravna). Poleg tega lahko opazimo tudi, da je graf odvoda funkcije $f(x) = x^3 - x$, ki predstavlja polinom tretje stopnje, enak paraboli, kar ustreza polinomu druge stopnje.

Fizikalna interpretacija odvoda

Denimo, da se neki delec (objekt) premika vzdolž ravne črte, kot je to prikazano na sliki 2.4, kjer merimo odmik delca od začetne točke 0.



Slika 2.4: Gibanje delca v času.

Pot delca je odvisna od časa t. Tako lahko zapišemo, da je odmik odvisen od časa, kar lahko zapišemo kot funkcijo časa:

$$y = f(t).$$

Naj delec v času a opravi pot od točke 0 do P in v času $a+h$ pot od točke 0 v S. Odmik od točke 0 je tako enak v prvem primeru enak $f(a)$ in v drugem $f(a+h)$.

Tako delec opravi pot od točke P do S, ki je enaka $f(a+h) - f(a)$. To pot pa opravi v času $(a+h) - a = h$. povprečna hitrost delca na tem intervalu je tako

$$\overline{v} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Če h manjšamo, se razdalja med P in S vedno bolj manjša in lahko izračunamo povprečno hitrost na vedno manjšem intervalu okoli točke P v času a. Ko gre $h \to 0$, dobimo trenutno hitrost v času a:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Tako lahko ugotovimo, da je trenutna hitrost v času a enaka odvodu poti po času v točki a.

Primer 1

Izračunaj odvod funkcije $f(x) = x^2$ z uporabo definicije odvoda.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

Torej je odvod

$$(x^2)' = 2x.$$

2.1.1 Odvodi elementarnih matematičnih funkcij

Odvode nekaterih elementarnih matematičnih funkcij lahko izračunamo neposredno z uporabo definicije odvoda. V nadaljevanju podajamo nekaj odvodov znanih matematičnih funkcij.

Potenčne funkcije:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Primer 2

Izračunaj naslednje odvode:

1. $$x' = (x^1)' = 1x^0 = 1$$
2. $$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
3. $$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+2}}$$
4. $$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
5. $$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Eksponentna in logaritemska funkcija:

- $$(e^x)' = e^x$$
- $$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Trigonometrične funkcije:

- $$\sin'(x) = \cos(x)$$
- $$\cos'(x) = -\sin(x)$$

2.1.2 Osnovna pravila odvajanja

Odvod funkcije pomnožene s skalarjem

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Odvod vsote ali razlike funkcij

$$(f(x) + g(x) - h(x))' = f'(x) + g'(x) - h'(x)$$

Primer 3

Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

- $f(x) = \frac{x^6+12}{4x^2}$

$$\left(\frac{x^6+12}{4x^2}\right)' = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' + \left(3x^{-2}\right)' = x^3 - 6x^{-3}$$

- $f(x) = \frac{2x+3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}{x}$

$$\left(\frac{2x+3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}{x}\right)' = \left(\frac{2x}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{x}\right)'$$
$$= (2)' + 3\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + 4\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 0 + 3(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + 4(-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}}$$
$$= -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}$$

Odvod produkta funkcij

Dve funkciji:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Tri funkcije:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Primer 4

Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

- $f(x) = x^2 \sin x$

$$\left(x^2 \sin x\right)' = (x^2)' \sin x + x^2 \sin' x = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

- $f(x) = x^2 e^x \sin x$

$$\begin{aligned} \left(x^2 e^x \sin x\right)' &= (x^2)' e^x \sin x + x^2 (e^x)' \sin x + x^2 e^x \sin' x \\ &= 2x e^x \sin x + x^2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x \end{aligned}$$

Odvod kvocienta funkcij

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{pri čemer je } g(x) \neq 0$$

Primer 5

Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

- $f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3-2x}{3+2x}\right)' &= \frac{(3-2x)'(3+2x) - (3-2x)(3+2x)'}{(3+2x)^2} \\ &= \frac{-2(3+2x) - (3-2x)2}{(3+2x)^2} \\ &= \frac{-6-4x-6+4x}{(3+2x)^2} \\ &= \frac{-12}{(3+2x)^2} \end{aligned}$$

- $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' &= \frac{\sin' x(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{1}{1+\cos x}
\end{aligned}$$

- $f(x) = \tan x$

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Odvodi sestavljenih funkcij

Odvod sestavljene funkcije:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Verižno pravilo:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

Primer 6

Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

- $f(x) = (3x^2 - x + 1)^2$

  Tu imamo sestavljeno funkcijo iz dveh funkcij $v(x) = 3x^2 - x + 1$ in $u(x) = x^2$, tako da velja $f(x) = u(v(x))$. Zato odvajamo po pravilu za sestavljene funkcije:

$$\begin{aligned}\left((3x^2-x+1)^2\right)' &= 2(3x^2-x+1)^1\cdot(3x^2-x+1)' \\ &= 2(3x^2-x+1)\cdot(6x-1)\end{aligned}$$

- $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

  Tu imamo sestavljeno funkcijo iz dveh funkcij $v(x)=25-x^2$ in $u(x)=\sqrt{x}$, tako da velja $f(x)=u(v(x))$. Zato odvajamo po pravilu za sestavljene funkcije:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{25-x^2}\right)' &= \left((25-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2}(25-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(25-x^2)' = \\ &= \frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \\ &= -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\end{aligned}$$

- $f(x)=a^x$

  Ker velja $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$, imamo tudi tu sestavljeno funkcijo iz dveh funkcij $v(x)=x\ln a$ in $u(x)=e^x$, tako da velja $f(x)=u(v(x))$. Zato odvajamo po pravilu za sestavljene funkcije:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \left(e^{x\ln a}\right)' \\ &= e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)' \\ &= e^{x\ln a}\ln a \\ &= a^x\ln a\end{aligned}$$

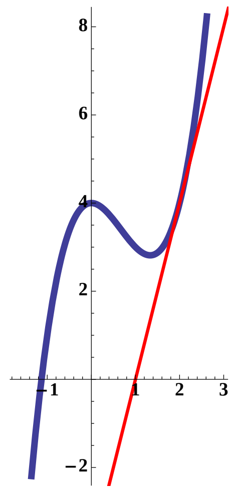
- $f(x)=\sin^2(3x-2)$

  Tudi tu imamo sestavljeno funkcijo iz treh funkcij $w(x)=3x-2$, $v(x)=\sin x$ in $u(x)=x^2$, tako da velja $f(x)=u(v(w(x)))$. Zato odvajamo po verižnem pravilu:

$$\begin{aligned}\left(\sin^2(3x-2)\right)' &= 2\sin^{2-1}(3x-2)\cdot(\sin(3x-2))'\cdot(3x-2)' \\ &= 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\cdot 3 \\ &= 6\sin(3x-2)\cos(3x-2)\end{aligned}$$

Primer 7

Določi premico tangente v točki $(2, 4)$ funkcije $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$, ki je prikazana na sliki:



Odvod v točki $(2, 4)$ je enak smernemu koeficientu tangente v tej točki. Enačba premice tangente je:

$$y = k_T x + n_T, \text{ kjer je } k_T = f'(x_0)$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$
$$k_T = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$$
$$n_T = y_0 - k_T x_0 = 4 - 4 \cdot 2 = -4$$

Enačba premice tangente v točki $(2, 4)$ funkcije $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ je tako:

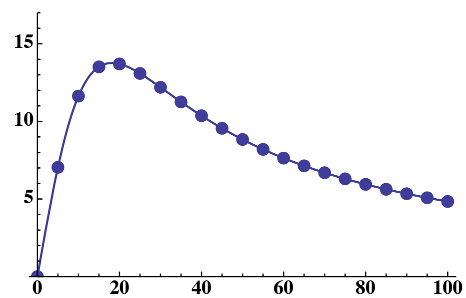
$$y = 4x - 4.$$

2.1.3 Numerično računanje približka odvoda

Približek odvoda v dani točki lahko ocenimo tudi numerično z določanjem smernega koeficienta premice sekante v sosednjih točkah dane točke. To je še posebej uporabno v primerih, ko ne poznamo analitične oblike funkcije, ampak imamo na razpolago samo graf funkcije oziroma je funkcija podana v obliki tabele.

Poglejmo si, kako ocenimo odvod v primeru grafično podane funkcije. Denimo, da merimo koncentracijo nekega zdravila v krvi v odvisnosti od časa. V tem primeru merimo koncentracijo zdravila v mikrogramih zdravila na mililiter krvi na vsakih 5 minut. Tabela meritev in graf sta prikazana na sliki 2.5.

čas v min	koncentracija zdravila	čas v min	koncentracija zdravila
0	0	55	8.2
5	7.0	60	7.6
10	11.6	65	7.1
15	13.5	70	6.7
20	13.7	75	6.3
25	13.1	80	5.9
30	12.2	85	5.6
35	11.3	90	5.3
40	10.4	95	5.1
45	9.6	100	4.8
50	8.8		



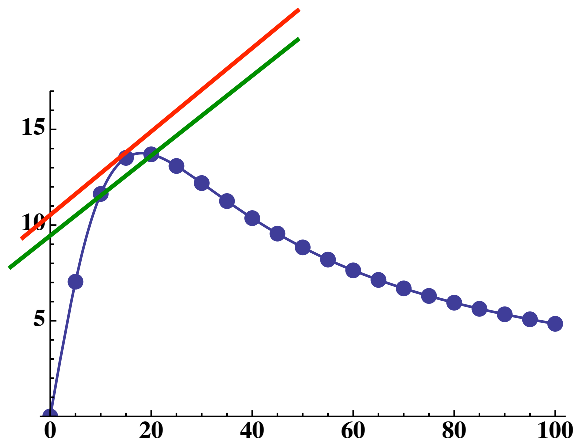
Slika 2.5: Meritve koncentracije zdravila v mikrogramih na mililiter krvi na vsakih 5 minut.

Iz meritev na sliki 2.5 lahko vidimo, da nekje do 20 min koncentracija zdravila narašča in pri 20 minuti je koncentracija največja, potem pa začne padati, pri stoti minuti imamo še vedno okoli 5 mikrogramov zdravila v krvi. Naša naloga pa je oceniti hitrost naraščanja ali padanja koncentracije zdravila v krvi. Zanima nas, kako hitro narašča koncentracija pri 5-ti minuti, pri 15-ti minuti in kako pada koncentracija npr. pri 30-ti in 80-ti minuti.

Hitrost padanja in naraščanja ocenimo z odvodom v dani točki, vendar v tem primeru ne poznamo analitične oblike funkcije in odvoda s pravili odvajanja tako ne moremo izračunati. Zato pa si pomagamo z numeričnimi ocenami odvoda.

Kot vemo, smo definirali odvod v dani točki kot smerni koeficient tangente v tej točki. Smerni koeficient tangente v tej točki pa smo dobili iz limite diferenčnega koeficienta, ki predstavlja smerni koeficient sekante v bližini dane točke. To pomeni, da lahko vrednost smernega koeficienta tangente, ki predstavlja odvod, ocenimo s smernim koeficientom sekante točk, ki so zelo blizu dani točki.

Tako lahko v primeru naše koncentracije zdravil ocenimo odvod v točki pri 15-ih minutah z izračunom smernega koeficienta sekante skozi dve sosednji točki t.j. v točkah pri 10. in 20. minuti, kot je to prikazano na sliki 2.6.



Slika 2.6: Ocena smernega koeficienta tangente, ki predstavlja odvod v dani točki, z izračunanim smernim koeficientom sekante dveh sosednjih točk dane točke.

Če to zapišemo še matematično, potem lahko odvod funkcije $f(x)$ v točki x_0 aproksimiramo z:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0 - \Delta)}{2\Delta},$$

kjer Δ predstavlja enakomeren razmik od točke x_0 v levo in desno.

V našem primeru lahko torej odvod funkcije, podane z meritvami koncentracije zdravila v krvi, v točki pri 15. minuti izračunamo kot

$$f'(15) \approx \frac{f(20) - f(10)}{2 \cdot 5}.$$

V tem primeru je $\Delta = 5$, ker smo izvajali meritve na vsakih 5 minut in sta zato prvi sosednji točki točke pri 15-ih minutah oddaljene za ± 5 minut. Če preberemo vrednosti za $f(20)$ in $f(10)$ iz tabele na sliki 2.5, lahko izračunamo numeričen približek odvoda v točki pri 15-ih minutah:

$$f'(15) \approx \frac{f(20) - f(10)}{2 \cdot 5} = \frac{13.7 - 11.6}{10} = 0.21.$$

To pomeni, da je hitrost naraščanja koncentracije pri 15-ih minutah približno 0.21 mikrograma na mililiter krvi na minuto.

Podobno lahko izračunamo odvode tudi za ostale vrednosti:

$$\begin{aligned}
f'(5) &\approx \frac{f(10)-f(0)}{2\cdot 5} = \frac{11.6-0}{10} = 1.16 \\
f'(30) &\approx \frac{f(35)-f(25)}{2\cdot 5} = \frac{11.3-13.1}{10} = -0.18 \\
f'(80) &\approx \frac{f(85)-f(75)}{2\cdot 5} = \frac{5.6-6.3}{10} = -0.07
\end{aligned}$$

Tako lahko ugotovimo, da vrednosti koncentracije zdravila v krvi najhitreje naraščajo pri 5. minuti (vrednost odvoda je največja), pri 30. in 80. so vrednosti negativne, kar pomeni, da koncentracija zdravila v krvi pada. In ker je vrednosti odvoda pri 30. minuti v negativno smer večja od vrednosti pri 80. minuti, lahko ugotovimo, da koncentracija pri 30. minuti hitreje pada kot v 80. minuti. Vse to se seveda ujema z grafom na sliki 2.5.

2.1.4 Odvodi višjega reda

Odvod funkcije $g(x) = f'(x)$, ki predstavlja odvod prvega odvoda funkcije $f'(x)$, lahko zapišemo kot $(f'(x))'$ in ga imenujemo drugi odvod funkcije $f(x)$ ter ga označimo s simboli $f''(x)$ ali $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Podobno lahko definiramo odvode višjega reda: n-ti odvod funkcije $f(x)$ je odvod $n-1$. odvoda funkcije $f(x)$. Oznaka za odvod reda n funkcije $f(x)$ je

$$f^{(n)}(x) \quad \text{ali} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Primer 8

- Izračunaj drugi odvod funkcije $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 + 8x - 5 \\
f''(x) &= 6x + 8
\end{aligned}$$

- Izračunaj drugi odvod funkcije $f(x) = \sin^2(3x-1)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(3x-1)\cos(3x-1)3 = 6\sin(3x-1)\cos(3x-1) \\ f''(x) &= 6\cos(3x-1)3\cos(3x-1) + 6\sin(3x-1)(-3\sin(3x-1)) \\ &= 18\cos^2(3x-1) - 18\sin^2(3x-1) \end{aligned}$$

- Izračunaj tretji odvod funkcije $f(x) = x^n$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \end{aligned}$$

2.2 Določanje ekstremov funkcij

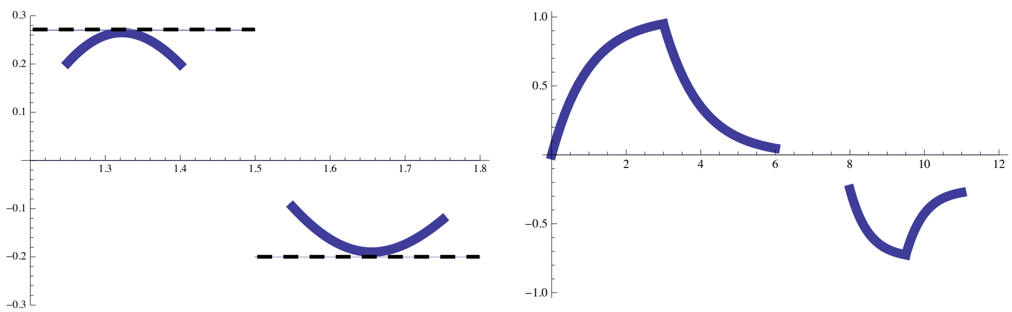
Ekstrem funkcije predstavlja lahko maksimum ali minimum neke funkcije.

V poglavju 1.2.2 smo definirali lokalni minimum oziroma maksimum funkcije v točkah x_0, kjer je vrednost funkcije $f(x_0)$ najmanjša oziroma največja od vseh drugih vrednosti funkcije v tej okolici.

Kot smo lahko že videli v primeru funkcije na sliki 2.3, je tangenta krivulje v ekstremnih točkah funkcije vzporedna z abscisno osjo. To pa pomeni, da je smerni koeficient tangent v teh točkah enak 0, ali da je odvod funkcije v teh točkah enak 0. To velja za minimume in maksimume funkcije. Tako lahko ugotovimo, da je potreben pogoj, da ima zvezna funkcija lokalni minimum ali maksimum samo v točkah, kjer je odvod enak nič. To je shematično prikazano na sliki 2.7 (levo). Vidimo pa tudi, da lahko obstajajo maksimumi ali minimumi tudi v primeru, ko odvodov v teh točkah ne moremo izračunati, npr. v primeru lomljene funkcije t.j. funkcije, ki je sestavljena iz dveh ali več delov različnih funkcij, kot je to prikazano na sliki 2.7 (desno).

Tako lahko povzamemo, da je potreben pogoj za obstoj ekstrema funkcije v dani točki, da je odvod, če obstaja, v tej točki enak nič. Za ekstreme pa moramo preveriti tudi točke, kjer odvodi ne obstajajo.

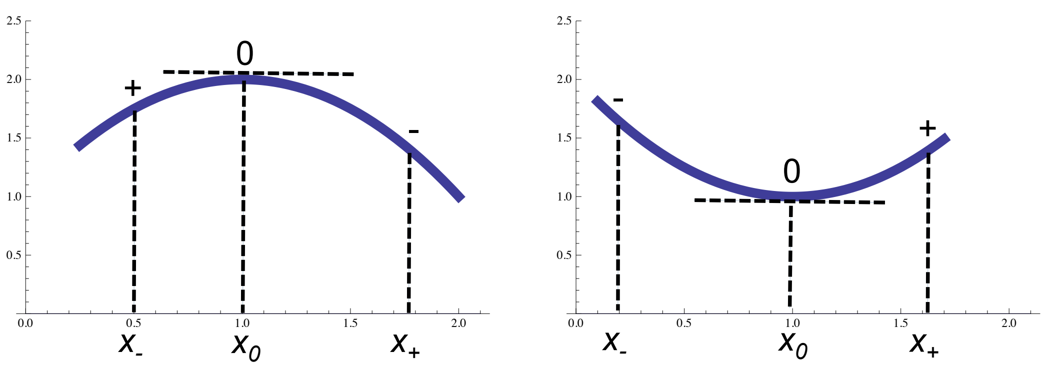
Za določanje ekstremov funkcije $f(x)$ tako najprej izračunamo ničle odvoda funkcije, torej poiščemo takšne točke $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, da velja $f'(x_i) = 0$ za $i = 0, 1, 2, \dots n$. Potem pa za vsakega kandidata za ekstrem preverimo, za kakšen ekstrem.



Slika 2.7: Potreben pogoj za obstoj lokalnega ekstrema: tangenta v točki lokalnega ekstrema je vzporedna z abscisno osjo (levo) ali pa ne obstaja (desno).

Določanje vrste ekstrema lahko izvedemo z dvema metodama.

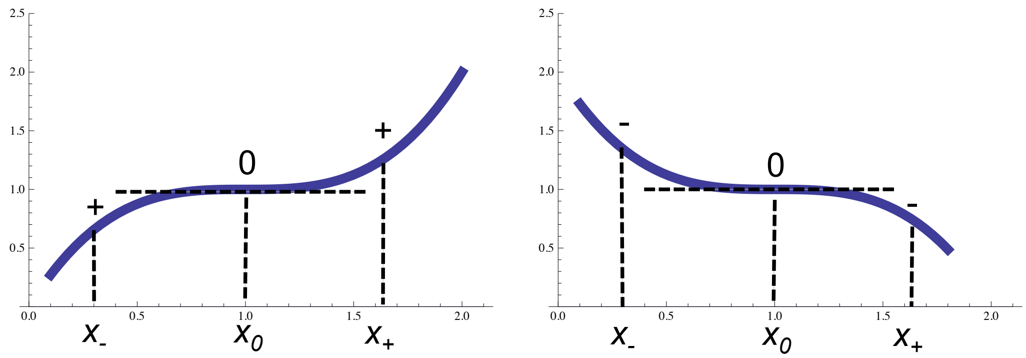
Prva metoda je *s primerjavo predznakov odvoda v okolici ekstremne točke.* V ta namen si izberemo takšni vrednosti x_- in x_+ v okolici točke kandidata za ekstrem, npr. v okolici točke x_0, in sicer tako da velja $x_- < x_0 < x_+$. Nato pogledamo vrednosti odvodov $f'(x_-)$ in $f'(x_+)$ v točkah x_- in x_+. Tam, kjer je vrednost odvoda pozitivna, funkcija monotono narašča, tam, kjer je vrednost odvoda negativna, pa funkcija pada.



Slika 2.8: Primerjava predznaka odvoda v okolici točke x_0, ki je kandidat za lokalni ekstrem. Če se predznaka razlikujeta, je v točki x_0 lokalni ekstrem.

Kot lahko vidimo iz slik 2.8 in 2.9 imamo več možnosti:

- Če velja $f'(x_-) > 0$ in $f'(x_+) < 0$, potem na levi strani kandidata za ekstremno točko x_0 funkcija monotono narašča, na desni strani pa pada. Iz tega sledi, da je v točki x_0 lokalni maksimum, kar je prikazano na sliki 2.8 (levo).
- Ravno obratno je v primeru lokalnega minimuma. Če velja $f'(x_-) < 0$



Slika 2.9: Primerjava predznaka odvoda v okolici točke x_0, ki je kandidat za lokalni ekstrem. Če se predznaka ne razlikujeta, v točki x_0 ni lokalni ekstrem, ampak prevoj funkcije.

in $f'(x_+) > 0$, potem na levi strani kandidata za ekstremno točko x_0 funkcija monotono pada, na desni strani pa narašča. Iz tega sledi, da je v točki x_0 lokalni minimum, kar je prikazano na sliki 2.8 (desno).

- Zgodi se lahko tudi, da velja $f'(x_-) > 0$ in $f'(x_+) > 0$ ali pa $f'(x_-) < 0$ in $f'(x_+) < 0$. V prvem primeru funkcija narašča tako na levi kot tudi na desni strani točke x_0, kar pomeni, da je v tej točki prevoj funkcije in ne lokalni ekstrem. To je prikazano na sliki 2.9 (levo). Podobno lahko zaključimo tudi v drugem primeru, ko funkcija na obeh straneh točke x_0 pada, kar pomeni, da nimamo ekstrema v tej točki, ampak prevoj funkcije, kar je prikazano na sliki 2.9 (desno).

Druga možnost določitve vrste lokalnega ekstrema je *z uporabo drugega odvoda funkcije.* To metodo lahko izpeljemo s pomočjo prve metode.

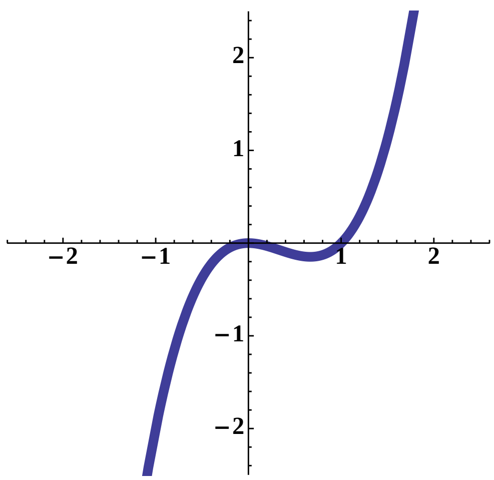
Ugotovili smo, da je v točki x_0 lokalni minimum, če velja, da je odvod na levi strani te točke pozitiven, na desni strani pa negativen. Če bi naredili graf odvoda funkcije v okolici točke x_0, bi bil na levi strani te točke pozitiven, v točki x_0 enak 0 in na desni strani negativen. To pa pomeni, da je odvod v okolici te točke padajoča funkcija, ali da je odvod od tega odvoda negativen (padajoče funkcije imajo negativen odvod). Z drugimi besedami drugi odvod v točki x_0 je torej negativen. Tako lahko zaključimo, da je *v točki x_0 lokalni maksimum, če je drugi odvod v tej točki negativen,* $f''(x_0) < 0$.

Podobno velja tudi za lokalni minimum. Ker za lokalni minimum v točki x_0 velja, da je odvod na levi strani te točke negativen in na desni strani pozitiven, lahko ugotovimo, da je funkcija odvoda v okolici točke x_0 naraščajoča, torej je odvod od odvoda pozitiven. To pa pomeni, da je *v točki x_0 lokalni minimum, če velja, da je* $f''(x_0) > 0$.

Prvo metodo za določanje vrste ekstremov se uporablja v primeru, ko je izračun odvodov funkcije težak, sicer pa se uporablja drugo možnost določitve ekstremov s pomočjo dodatnega odvajanja funkcije.

Primer 9

Določi ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - x^2$.



Najprej izračunamo prvi odvod in poiščemo kandidate za ekstreme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x \\ 3x^2 - 2x &= 0 \\ x(3x-2) &= 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Določimo tip ekstrema s preverjanjem predznaka odvoda v okolici kandidatov za ekstrem:

Kandidat $\mathbf{x_1 = 0}$:
Izberemo točki -0.1, in 0.1, ter izračunamo $f'(-0.1) > 0$ in $f'(0.1) < 0$, iz česar sledi, da ima v točki $(0,0)$ funkcija $f(x)$ **lokalni maksimum**.

Kandidat $\mathbf{x_2 = \frac{2}{3}}$:
Izberemo točki 0.5, in 0.7, ter izračunamo $f'(0.5) < 0$ in $f'(0.7) > 0$, iz česar sledi, da ima v točki $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$ funkcija $f(x)$ **lokalni minimum**.

Tip ekstrema lahko določimo tudi z drugim odvodom:

$$f''(x) = 6x - 2$$

Ker velja $f''(0) = -2 < 0$, sledi, da je v točki $x_1 = 0$ lokalni maksimum funkcije.
Ker velja $f''(\frac{2}{3}) = 2 > 0$, sledi, da je v točki $x_2 = \frac{2}{3}$ lokalni minimum funkcije.

Primer 10

Določi ekstreme funkcije $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$.

Najprej izračunamo prvi odvod in poiščemo kandidate za ekstreme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 48x^{-2} \\ 3x^2 - \frac{48}{x^2} &= 0 \\ \frac{3}{x^2}(x^4 - 16) &= 0 \\ &\Longrightarrow x_{1,2} = 2,\ x_{3,4} = -2 \end{aligned}$$

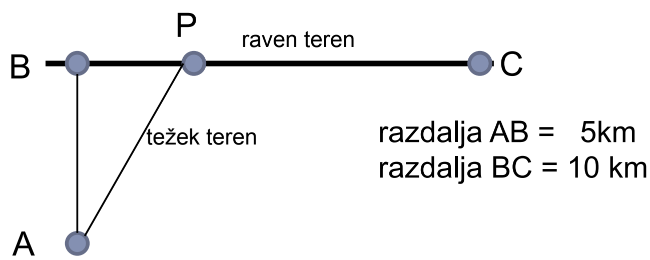
Določimo tip ekstrema s preverjanjem predznaka odvoda v okolici kandidatov za ekstrem:

Kandidat $\mathbf{x_{1,2} = 2}$:
Izberemo točki 1, in 3, ter izračunamo $f'(1) = -45 < 0$ in $f'(3) = \frac{65}{3} > 0$, iz česar sledi, da ima v točki $(2, 32)$ funkcija $f(x)$ **lokalni minimum**.

Kandidat $\mathbf{x_{3,4} = -2}$:
Izberemo točki -3, in -1, ter izračunamo $f'(-3) = \frac{65}{3} > 0$ in $f'(-1) = -45 < 0$, iz česar sledi, da ima v točki $(-2, -32)$ funkcija $f(x)$ **lokalni maksimum**.

Primer 11

Želimo priti iz točke A v točko C v čim krajšem času. Hitrost hoje na težkem terenu je 3 km/h, na ravnem pa 5 km/h. Razdalja od točke A do najbližje točke ravnega terena, točke B, je 5 km. Razdalja od točke B do točke C pa je 10 km. Shematično je to prikazano na spodnji sliki:



Kako načrtovati pot, da bomo čimprej prišli iz točke A v točko C?

Imamo več možnosti rešitev: Lahko gremo od točke A do točke B po najkrajši poti po težkem terenu in potem od točke B do točke C po ravnem terenu. Lahko gremo direktno iz točke A v točko C, vendar bomo vedno hodili po težkem terenu. Lahko pa se odločimo, da bomo hodili po težkem terenu do neke vmesne točke na razdalji BC, recimo ji točka P, in potem bomo nadaljevali od točke P do točke C po ravnem terenu.

Izberemo si tretjo možnost in optimiziramo čas hoje.
Označimo s spremenljivko x razdaljo od točke B do P. Potem lahko določimo naslednje:

	AP	PC
pot, $s =$	$\sqrt{x^2+25}$	$10-x$
hitrost, $v =$	3	5
čas, $t = \frac{s}{v} =$	$\frac{\sqrt{x^2+25}}{3}$	$\frac{10-x}{5}$

Pri čemer smo pot od A do P izračunali po Pitagorovem izreku iz trikotnika Δ_{ABP}, kjer velja $\overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$ ali $5^2 + x^2 = \overline{AP}^2$. Razdalja $\overline{PC}$ pa je enaka $\overline{BC} - \overline{BP}$ ali $10 - x$.

Tako lahko ugotovimo, da je skupni čas poti od A do C enak času poti od A do P in času poti od P do C:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+25}}{3} + \frac{10-x}{5}.$$

Če hočemo poiskati najkrajši čas poti, potem iščemo minimum zgornje funkcije. Da poiščemo ekstreme funkcije, moramo funkcijo odvajati in poiskati ničle odvoda, torej:

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{x}{3\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{5} \\
\frac{x}{3\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{5} &= 0 \\
5x &= 3\sqrt{25+x^2} \\
25x^2 &= 9(25+x^2) \\
16x^2 - 225 &= 0 \\
&\implies x_1 = \frac{15}{4} = 3.75, \ \ x_2 = -\frac{15}{4} = -3.75
\end{aligned}$$

Negativna rešitev $x_2 = -3.75$ ne ustreza, ker pomeni, da bi postavili točko P na levo stran točke B, kar bi čas kvečjemu povečalo.

Torej ostane rešitev $x_1 = 3.75$, kar pomeni, da moramo iz točke A priti na raven teren v točki P, ki je 3.75 km oddaljena od točke B.

Da se prepričamo, da je x_1 res minimum funkcije $t(x)$ izračunamo $t'(x)$ v okolici točke x_1, npr. za vrednosti $x_- = 3$ in $x_+ = 4$, kjer lahko ugotovimo, da je $t'(3) < 0$ in $t'(4) > 0$, kar ustreza pogojem za minimum.

2.3 Odvod funkcije več spremenljivk

Če imamo funkcijo več spremenljivk $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, potem lahko tudi izračunamo odvod funkcije v eni spremenljivki, npr. v spremenljivki x_i, s tem, da vse ostale spremenljivke obravnavamo kot konstante. V tem primeru odvod zapišemo in izračunamo po naslednjem pravilu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

Takemu odvodu pravimo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x_i in jih računamo po enakih pravilih kot odvode ene spremenljivke, pri čemer ostale spremenljivke obravnavamo kot konstante.

Funkcija n spremenljivk ima n parcialnih odvodov prvega reda:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Primer 12

Izračunaj parcialne odvode funkcije $f(x, y, z) = \frac{x^3(y-2)}{z}$.

- Parcialni odvod po x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(y-2)}{z}$$

- Parcialni odvod po y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{z}$$

- Parcialni odvod po z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x^3(y-2)}{z^2}$$

2.3.1 Prileganje funkcij k podatkom

Kot poseben primer uporabe parcialnih odvodov, si bomo ogledali, kako lahko določimo parametre funkcij, ki jih želimo čimbolj natančno prilegati k danim podatkom. Na ta način lahko podatke modeliramo z znanimi matematičnimi funkcijami, na podlagi katerih lahko potem analiziramo zakonitosti v podatkih ali pa jih uporabimo za napovedovanje novih vrednosti iz podatkov.

Obravnavali bomo primer prileganja premice k podatkom.

Poglejmo primer meritev porabe energije pri hoji človeka različne mase in ob različnih hitrostih hoje, ki so zbrane v tabeli na sliki 2.10.

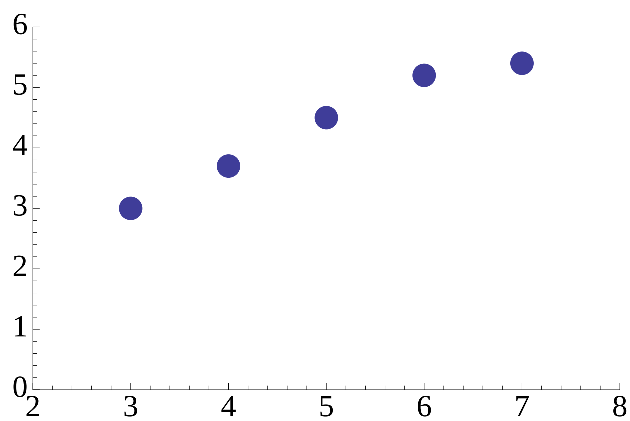
Meritve porabe energije v tabeli so pridobljene za ljudi telesne mase od 40 do 90 kg, kjer je izmerjena poraba energija za hojo pri hitrostih od 3 do

Hitrost (km/h)	Telesna masa						
	Kg	40	50	60	70	80	90
3		1.6	2.1	2.5	3.0	3.5	3.9
4		2.3	2.8	3.3	3.7	4.2	4.7
5		3.0	3.5	4.0	4.5	4.9	5.4
6		3.8	4.2	4.7	5.2	5.7	6.1
7		4.5	4.9	5.4	5.4	6.4	6.8

Slika 2.10: Primer meritev porabe energije v kcal/min pri hoji človeka različne mase in ob različnih hitrostih hoje.

7 km/h. Če si ogledamo porabo pri hoji človeka težkega 70 kg pri različnih hitrostih hoje, lahko narišemo graf, ki je prikazan na sliki 2.11.

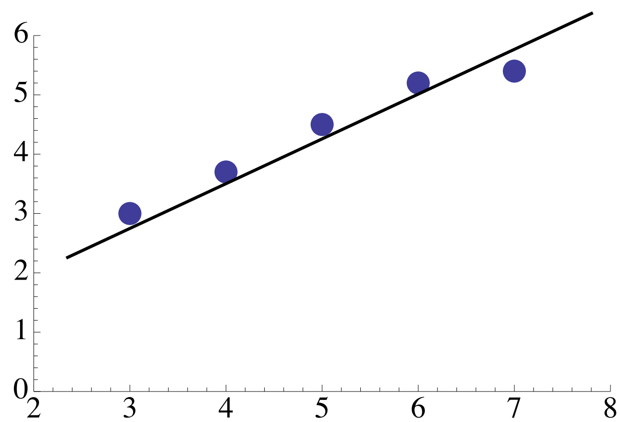
Iz grafa lahko opazimo, da se z večanjem hitrosti hoje, poveča tudi poraba energije. Podobno lahko ugotovimo tudi za ostale meritve ob različnih težah ljudi.



Slika 2.11: Izris grafa porabe energije pri hoji človeka težkega 70 kg ob različnih hitrostih hoje iz tabele 2.10.

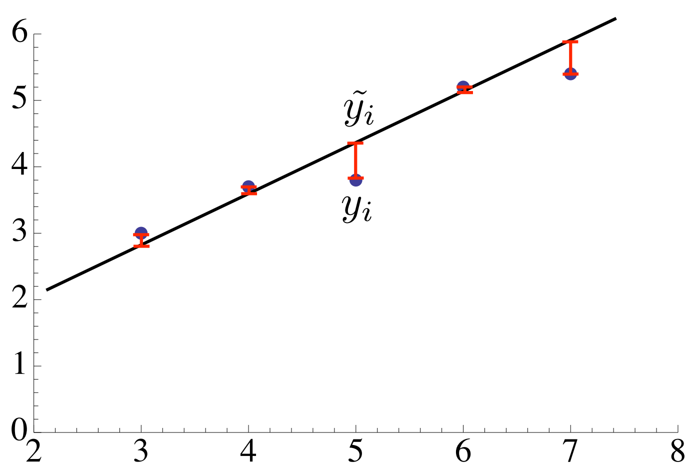
Tako podan graf nam sicer nekaj pove o odvisnosti hitrosti hoje človeka in porabi energije, vendar ker so meritve izvedene samo za celoštevilske vrednosti hitrosti hoje, tako npr. ne moremo iz grafa ali pa tabele razbrati, kolika bi bila poraba energije pri hitrosti recimo 4.5 km/h, ali pa kakšna je poraba energije pri človeku z maso 74 kg. Da bi lahko to ugotovili, je potrebno te podatke na nek način opisati z ustrezno matematično funkcijo, s katero bi lahko izračunali porabo energije pri poljubnih vrednostih hitrosti ali pa masi človeka. Zato je potrebno podatke modelirati s funkcijo, ki bi najbolje ustrezala danim podatkom. Če si za funkcijo izberemo npr. premico,

$f(x) = ax + b$, potem moramo parametra premice a in b določiti tako, da se bo premica kar najbolje prilegala danim podatkom, kot je to prikazano na sliki 2.12. V tem primeru pravimo, da premico prilegamo k podatkom. Seveda pa lahko prilegamo katerokoli matematično funkcijo. Mi se bomo v nadaljevanju omejili na prileganje premice k podatkom.



Slika 2.12: Prileganje funkcije premice k podatkom porabe energije pri hoji človeka težkega 70 kg ob različnih hitrostih hoje.

V primeru prileganja funkcije premice $f(x) = ax + b$ k podatkom se vprašamo, kako določiti parametra a in b, da bo prileganje "najboljše". "Najboljše"v tem primeru pomeni, da bo napaka med dejanskimi vrednostmi meritev in napovedanimi vrednostmi, ki jih določimo s funkcijo premice, najmanjša.



Slika 2.13: Napake, ki jih naredimo, če podatke (x_i, y_i) modeliramo s premico $f(x) = ax + b$, kjer $\tilde{y}_i$ izračunamo iz premice $\tilde{y}_i = f(x_i)$.

Zapišimo to še matematično. Denimo, da imamo podane podatke v obliki $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$. V našem primeru x_i predstavljajo hitrosti, torej $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 7$, y_i pa izmerjeno porabo energije, torej $y_1 = 3.0, y_2 = 3.7, y_3 = 4.5, y_4 = 5.2, y_5 = 5.4$, v primeru osebe težke 70 kg. Tem podatkom bomo prilegali premico $f(x) = ax+b$. Tako lahko izračunamo $\tilde{y}_i = f(x_i) = ax_i + b$ pri vsaki meritvi x_i. Zveza med dejanskimi meritvami y_i in tako izračunanimi vrednostmi $\tilde{y}_i$ je prikazana na sliki 2.13. Vrednosti $\tilde{y}_i$ ležijo na premici $f(x)$ in se lahko razlikujejo od dejanskih vrednosti y_i. Napako, ki jo tako naredimo s premico, lahko označimo z $\epsilon_i = y_i - \tilde{y}_i$. Kvadrate posamičnih napak seštejemo, da dobimo skupno napako prileganja, torej $\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i^2$. Želimo si, da bi bila skupna napaka čim manjša, torej iščemo minimum skupne napake. Tako lahko zapišemo:

$$\min \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i^2 = \min \sum_{i=1}^{N} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$$

To pomeni, da iščemo takšna parametra a in b, da bo zgornji izraz najmanjši. Ker pa vemo, da je pogoj za obstoj ekstrema, da je odvod enak nič, lahko iščemo takšna a in b, da bo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tako dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama, ki jih lahko rešimo analitično. Najprej poglejmo enačbo pri parcialnem odvodu s spremenljivko b in izrazimo b:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2 &= 0 \\
\sum_{i=1}^{N} 2(y_i - ax_i - b)(-1) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} ax_i - \sum_{i=1}^{N} b &= 0 \\
Nb &= \sum_{i=1}^{N} y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i \\
b &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i
\end{aligned}$$

To pomeni, da za optimalen parameter b velja:

$$b = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Če zapišemo, da je $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ povprečje x_i, $\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$ pa povprečje y_i, potem je:

$$\boxed{b = \overline{y} - a\overline{x}}$$

Podobno izračunamo še optimalen parameter a iz prve enačbe parcialnega odvoda pri parametru a, kjer na mestu parametra b vstavimo zgornjo zvezo za b:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2 = 0\\
&\sum_{i=1}^{N} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0\\
&\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} a x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} b x_i = 0\\
&\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{N} x_i = 0\\
&\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i)\sum_{i=1}^{N} x_i = 0\\
&\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\sum_{i=1}^{N} x_i + a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\sum_{i=1}^{N} x_i = 0\\
&\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\sum_{i=1}^{N} x_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\sum_{i=1}^{N} x_i\\
&\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\sum_{i=1}^{N} x_i = a\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\sum_{i=1}^{N} x_i\right)
\end{aligned}
$$

Optimalen parameter a tako izračunamo kot:

$$
a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\sum_{i=1}^{N} x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\sum_{i=1}^{N} x_i}
$$

Zaradi bolj pregledne oblike, lahko tudi zapišemo:

$$
SXY = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i, \quad SX = \sum_{i=1}^{N} x_i, \quad SY = \sum_{i=1}^{N} y_i, \quad SXX = \sum_{i=1}^{N} x_i^2,
$$

kar pomeni, da je

$$
\boxed{a = \frac{SXY - \frac{1}{N}\cdot SX\cdot SY}{SXX - \frac{1}{N}\cdot SX\cdot SX}}
$$

Poglejmo si izračun optimalnih parametrov premice v našem primeru podatkov porabe energije pri hoji osebe težke 70 kg. Ugotovili smo že, da smo pridobili naslednje meritve:

$$(3, 3.0), (4, 3.7), (5, 4.5), (6, 5.2), (7, 5.4).$$

Tako lahko izračunamo parametre premice $f(x) = ax + b$, kot

$$\begin{aligned}
SXY &= 3 \cdot 3.0 + 4 \cdot 3.7 + 5 \cdot 4.5 + 6 \cdot 5.2 + 7 \cdot 5.4 = 115.3 \\
SX &= 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 \\
SY &= 3.0 + 3.7 + 4.5 + 5.2 + 5.4 = 21.8 \\
SXX &= 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 135 \\
--- &- ------- \\
a &= \frac{SXY - \frac{1}{N} \cdot SX \cdot SY}{SXX - \frac{1}{N} \cdot SX \cdot SX} \\
a &= \frac{115.3 - \frac{1}{5} \cdot 25 \cdot 21.8}{135 - \frac{1}{5} \cdot 25 \cdot 25} = \frac{6.3}{10} \\
a &= 0.63 \\
--- &- ------- \\
\overline{x} &= \frac{1}{N} \cdot SX = \frac{1}{5} 25 = 5 \\
\overline{y} &= \frac{1}{N} \cdot SY = \frac{1}{5} 21.8 = 4.36 \\
--- &- ------- \\
b &= \overline{y} - a\overline{x} \\
b &= 4.36 - 0.63 \cdot 5 \\
b &= 1.21
\end{aligned}$$

Premica, ki se najbolj prilega danim podatkom, ima tako obliko:

$$f(x) = 0.63x + 1.21.$$

Prikazana je na sliki 2.12.

Ko imamo enkrat določeno premico, lahko izračunamo tudi porabo energije za točke, ki jih nismo izmerili, npr. pri hoji s hitrostjo 3.5 km/h, pri čemer je poraba enaka $f(3.5) = 0.63 \cdot 3.5 + 1.21 = 3.325$ ali pa pri 6.4 km/h, kjer znaša poraba $f(5.4) = 0.63 \cdot 6.4 + 1.21 = 4.522$ ipd.

Primer 13

Izračunajmo še parametre premice, ki se prilega podatkom v tabeli 2.10 pri konstantni hitrosti hoje 5 km/h, vendar pri osebah različne mase.

Podatke lahko preberemo v tabeli 2.10:

teža	40	50	60	70	80	90
poraba energ.	3.0	3.5	4.0	4.5	4.9	5.4

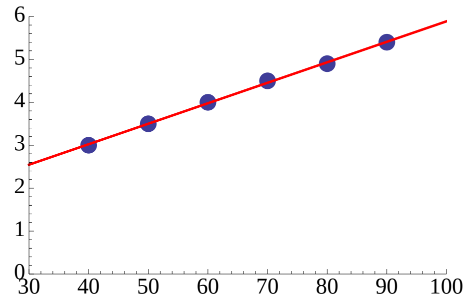
In izračunamo parametre premice $f(x) = ax + b$ kot

$$
\begin{array}{rcl}
SXY & = & 40 \cdot 3.0 + 50 \cdot 3.5 + 60 \cdot 4.0 + 70 \cdot 4.5 + 80 \cdot 4.9 + 90 \cdot 5.4 = \\
& = & 1728 \\
SX & = & 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = 390 \\
SY & = & 3.0 + 3.5 + 4.0 + 4.5 + 4.9 + 5.4 = 25.3 \\
SXX & = & 40^2 + 50^2 + 60^2 + 70^2 + 80^2 + 90^2 = 27100 \\
--- & - & ------- \\
a & = & \dfrac{SXY - \frac{1}{N} \cdot SX \cdot SY}{SXX - \frac{1}{N} \cdot SX \cdot SX} \\
a & = & \dfrac{1728 - \frac{1}{6} \cdot 390 \cdot 25.3}{27100 - \frac{1}{6} \cdot 390 \cdot 390} \\
a & = & 0.0477143 \\
--- & - & ------- \\
\overline{x} & = & \dfrac{1}{N} \cdot SX = \dfrac{1}{6} 390 = 65 \\
\overline{y} & = & \dfrac{1}{N} \cdot SY = \dfrac{1}{6} 25.3 = 4.21667 \\
--- & - & ------- \\
b & = & \overline{y} - a\overline{x} \\
b & = & 4.21667 - 0.0477143 \cdot 65 \\
b & = & 1.11524
\end{array}
$$

Premica, ki se najbolj prilega danim podatkom, ima tako obliko:

$$f(x) = 0.0477143x + 1.11524$$

in je prikazana na spodnji sliki:



Tako lahko izračunamo npr. tudi, kolikšna je poraba energije ob hoji s hitrostjo 5 km/h osebe težke 75 kg:

$$f(75) = 0.0477143 \cdot 75 + 1.11524 = 4.69.$$

Prikazali smo način prileganja premice k podatkom z minimizacijo vsote kvadratov napak. Na tak način se izračuna parametre modelov tudi pri linearni regresijski analizi podatkov. V našem primeru smo določali parametre premice, vendar je v primeru drugačnih funkcij, lahko tudi večdimenzionalnih funkcij, postopek določanja parametrov enak. Vedno poskušamo poiskati minimum skupne napake predlaganega modela in dejanskih vrednosti z odvajanjem po posameznih parametrih funkcije. V našem primeru smo rešitve za parametre premice izpeljali analitično, vendar se v vseh primerih to ne da, zato si pomagamo z numeričnimi približki odvodov, ki smo jih spoznali v poglavju 2.1.3.

3. Integralni račun

3.1 Nedoločeni integrali

V diferencialnem računu imamo dano neko funkcijo $f(x)$ in iščemo njen odvod, torej $f'(x)$. V integralnem računu postavimo obratno vprašanje: katero funkcijo moramo odvajati, da dobimo funkcijo $f(x)$? Operacijo, s katero izračunamo takšno funkcijo, imenujemo *integral*.

Matematično to zapišemo na naslednji način. Naj bo $f(x)$ neka funkcija, potem lahko definiramo takšno funkcijo $F(x)$, katere odvod je enak $f(x)$, torej

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcijo $F(x)$ imenujemo *primitivna funkcija*. Rešitev zgornje enačbe je več, med seboj pa se razlikujejo za konstantno vrednost, saj velja $(F(x) + C)' = F'(X) = f(x)$, kjer je C konstanta (realno število).

Nedoločeni integral funkcije $f(x)$ je tako izraz:

$$F(x) + C = \int f(x)dx$$

Funkcijo $f(x)$ imenujemo integrand, x je integracijska spremenljivka, C pa integracijska konstanta.

3.1.1 Nedoločeni integrali elementarnih matematičnih funkcij

Nedoločene integrale nekaterih matematičnih funkcij lahko izračunamo neposredno iz odvodov znanih funkcij. V nadaljevanju podajamo nekaj rešitev takšnih integralov brez integracijske konstante C.

Potenčne funkcije:

- $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (n \neq 1),$$

  ker je odvod $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} = x^n$.

- $$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

  ker je odvod $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

Eksponentne funkcije:

- $$\int e^x dx = e^x,$$

  ker je odvod $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

- $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a},$$

  ker je odvod $\frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln a} = \frac{d}{dx}\frac{e^{x\ln a}}{\ln a} = \frac{e^{x\ln a}\ln a}{\ln a} = e^{x\ln a} = a^x$.

Trigonometrične funkcije:

- $$\int \sin(x) dx = -\cos(x),$$

  ker je odvod $\frac{d}{dx}(-\cos(x)) = \sin(x)$.

- $$\int \cos(x) dx = \sin(x),$$

  ker je odvod $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$.

- $$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)|,$$

  ker je odvod $\frac{d}{dx}(-\ln\cos x) = -\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$.

Primer 1

1. Izračunaj integral $\int \sqrt{x}dx$.

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} + C$$

2. Izračunaj integral $\int \frac{dx}{\cos^2(x)}$, pri čemer si pomagaj z odvodom funkcije $\tan x$.

   Izračunajmo odvod:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

   Torej je

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C.$$

3.1.2 Pravila integriranja

Konstantni faktor v integrandu

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Integriranje vsote in razlike

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$$

Primer 2

Izračunaj integral $\int (x+3)^2(x-1)dx$.

$$\int (x+3)^2(x-1)dx = \int (x^2+6x+9)(x-1)dx =$$
$$= \int (x^3+5x^2+3x-9)dx = \frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 9x + C$$

Pravilo substitucije

Če naredimo zamenjavo $x = u(t)$, potem velja:

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$$

Primer 3

1. Izračunaj integral $\int \cos(3x-2)dx$.

   Naredimo substitucijo $u = 3x-2$ in izračunamo odvod $du = 3dx$ ter izrazimo del integranda $dx = \frac{1}{3}du$. Potem izračunamo:

$$\begin{aligned} \int \cos(3x-2)dx &= \int \cos(u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\sin(u) + C = \\ &= \frac{1}{3}\sin(3x-2) + C \end{aligned}$$

Primer 4

1. Izračunaj integral $\int \frac{x}{1+x^2}dx$.

Naredimo substitucijo $u = 1+x^2$ in izračunamo odvod $du = 2xdx$ ter izrazimo del integranda $xdx = \frac{1}{2}du$. Potem izračunamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}dx &= \int \frac{1}{u}\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\ln(u) + C = \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

2. Izračunaj integral $\int \sin^2(x)\cos(x)dx$.

   Naredimo substitucijo $u = \sin(x)$ in izračunamo odvod $du = \cos(x)dx$ ter izrazimo del integranda $\cos(x)dx = du$. Potem izračunamo:

$$\begin{aligned}&\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \int u^2 du = \\ = \; &\frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C\end{aligned}$$

3. Izračunaj integral $\int x\sin(x^2)dx$.

   Naredimo substitucijo $u = x^2$ in izračunamo odvod $du = 2xdx$ ter izrazimo del integranda $xdx = \frac{1}{2}du$. Potem izračunamo:

$$\begin{aligned}\int x\sin(x^2)dx &= \int \sin(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}(-\cos(u)) + C = \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C\end{aligned}$$

Primer 5

Izračunaj integral $\int x^2\sqrt{x+1}dx$.

Naredimo substitucijo $u = x+1$ in izračunamo odvod $du = dx$ ter izrazimo del integranda $x = u-1$. Potem izračunamo:

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x+1}dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}du = \int (u^2-2u+1)u^{1/2} \\
= \quad & \int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})du = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 2\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
= \quad & 2u^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{7}u^2 - \frac{2}{5}u + \frac{1}{3}\right) + C \\
= \quad & 2(x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{7}(x-1)^2 - \frac{2}{5}(x-1) + \frac{1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

Primer 6

Če je $F(x) = \int f(x)dx$, pokaži, da velja

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b), \quad a \neq 0.$$

Izračunajmo integral $\int f(ax+b)dx$ tako, da naredimo substitucijo $u = ax+b$ in izračunamo odvod $du = adx$:

$$\int f(ax+b)dx = \int f(u)\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Integriranje po delih

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Krajše lahko zapišemo $\int udv = uv - \int vdu$. Integriranje po delih uporabimo, ko hočemo integriranje težjega izraza udv nadomestiti z integriranjem lažjega izraza vdu.

Primer 7

Izračunaj integral $\int xe^x dx$.

Izberemo $u = x$ in $dv = e^x dx$.
Nato izračunamo odvod $du = dx$ in integral $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$.
Potem izračunamo:

$$\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx =$$
$$= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Primer 8

1. Izračunaj integral $\int x \ln x dx$.

   Izberemo $u = \ln x$ in $dv = xdx$.
   Nato izračunamo odvod $du = \frac{dx}{x}$ in integral $v = \int dv = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$.
   Potem izračunamo:

$$\int x \ln x dx = \int udv = uv - \int vdu =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C =$$
$$= \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

2. Izračunaj integral $\int x \sin x dx$.

   Izberemo $u = x$ in $dv = \sin(x)dx$.
   Nato izračunamo odvod $du = dx$ in integral
   $v = \int dv = \int \sin(x)dx = -\cos(x)$.

   Potem izračunamo:

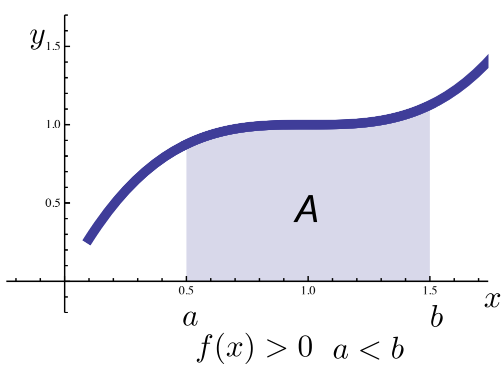
$$\int x \sin x dx = \int u dv = uv - \int v du =$$
$$= -x\cos(x) - \int (-\cos(x))dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

3.2 Določeni integrali

Določeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) je enak ploščini dela ravnine A, ki ga omejujejo krivulje $y = f(x)$, abscisna os x ter premici $x = a$ in $x = b$:

$$pl_A = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

kjer je $F(x)$ enak nedoločenemu integralu funkcije $f(x)$, $F(x) = \int f(x)dx$. Vrednost a predstavlja spodnjo mejo določenega integrala, vrednost b pa zgornjo mejo. Shematično je to prikazano na sliki 3.1.



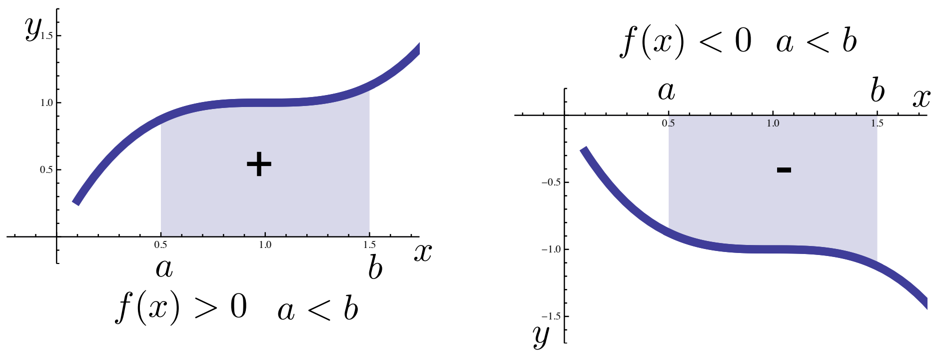
Slika 3.1: Ploščina področja A med abscisno osjo in krivuljo funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) se izračuna kot $pl_A = \int_a^b f(x)dx$.

Geometrična interpretacija določenega integrala in pravilo predznaka

Vrednost določenega integrala funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) je določena s predznakom funkcije na tem intervalu:

- Če je $f(x) > 0$ na intervalu (a, b), potem je $\int_a^b f(x)dx > 0$.
- Če je $f(x) < 0$ na intervalu (a, b), potem je $\int_a^b f(x)dx < 0$.

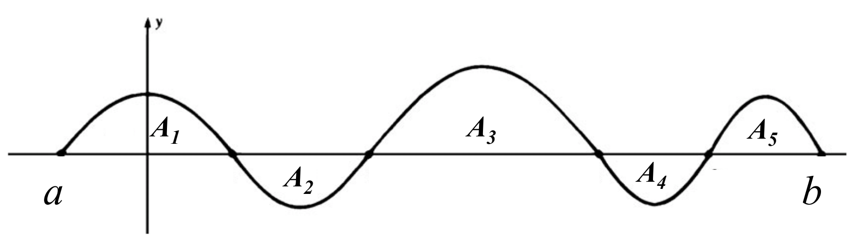
To je shematično prikazano na sliki 3.2.



Slika 3.2: Vrednost določenega integrala v primerih pozitivne (levo) in negativne funkcije (desno).

V splošnem velja, da je vrednost določenega integrala funkcije ne nekem intervalu vsota pozitivnih in negativnih ploščin, ki jih krivulja funkcije določa na tem intervalu. Tako lahko zapišemo, da je vrednost določenega integrala funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b), ki je prikazana na sliki 3.3, enaka:

$$\int_a^b f(x)dx = (A_1 + A_3 + A_5) - (A_2 + A_4).$$



Slika 3.3: Vrednost določenega integrala v primerih pozitivnih in negativnih delov funkcije.

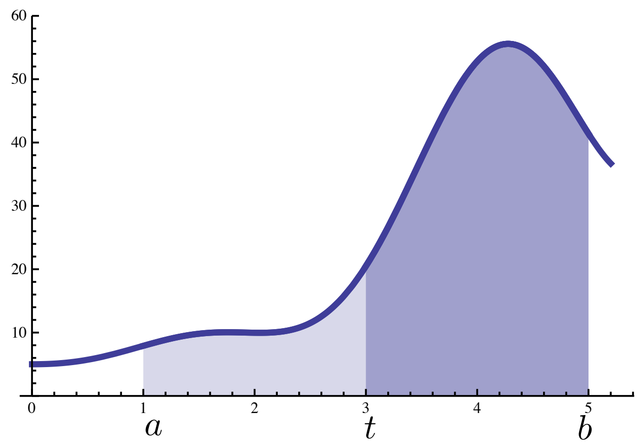
3.2.1 Osnovne lastnosti določenih integralov

Aditivnost določenega integrala

Za določene integrale velja lastnost aditivnosti, ki jo zapišemo kot

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx$$

za $a \leq t \leq b$. To je shematično prikazano na sliki 3.4.



Slika 3.4: Lastnost aditivnosti določenega integrala. Skupna ploščina je vsota leve in desne ploščine.

Neodvisnost od imena integracijske spremenljivke

Ne glede na zamenjavo spremenljivke v integrandu določenega integrala vrednost integrala ostaja enaka:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(v)dv.$$

Zamenjava integralskih mej

Če v določenem integralu zamenjamo vrednosti mej, se spremeni predznak določenega integrala:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Zveza med določenim integralom in odvodom

Če je funkcija $f(x)$ zvezna funkcija na intervalu (a,b), potem je $\int_a^t f(x)dx$ za $a \leq t \leq b$ funkcija spremenljivke t in velja:

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t).$$

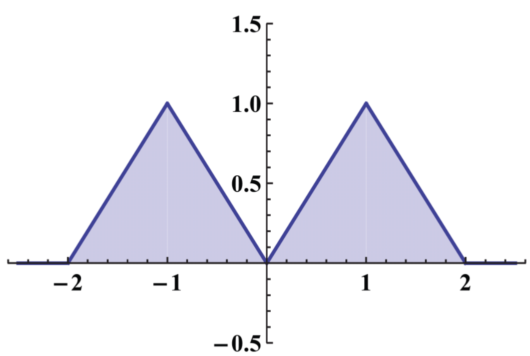
To lahko pokažemo na naslednji način. Ker velja $\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$, pri čemer je $F(t) = \int f(t)dt$, potem je $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = \frac{d}{dt}\left(F(t) - F(a)\right) = F'(t)$. To pa je ravno $F'(t) = f(t)$, saj je $F(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(t)$.

Določeni integral sode in lihe funkcije

Določeni integral sode funkcije na simetričnem intervalu je enak dvojni vrednosti določenega integrala na polovičnem intervalu. To lahko zapišemo na naslednji način:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$

za $a > 0$, pri čemer velja, da je funkcija $f(x)$ soda. To je shematično prikazano na sliki 3.5.

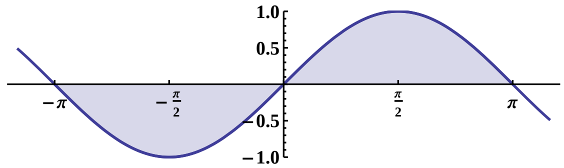


Slika 3.5: Določeni integral sode funkcije na simetričnem intervalu je enak dvojni vrednosti določenega integrala na polovičnem intervalu.

Določeni integral lihe funkcije na simetričnem intervalu je enak 0:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

za $a > 0$, pri čemer velja, da je funkcija $f(x)$ liha. To je shematično prikazano na sliki 3.6.



Slika 3.6: Določeni integral lihe funkcije na simetričnem intervalu je enak 0. Vrednosti na polovičnih intervalih se ravno odštejeta. Primer funkcije sinus.

Primer 9

1. Izračunaj določen integral $\int_{-1}^{1} x^2 dx$.

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

   Ker je funkcija $f(x) = x^2$ soda, lahko izračunamo integral tudi na naslednji način:

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} x^2 dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

2. Izračunaj določen integral $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx$, ki je prikazan na sliki 3.6:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx &= -\cos(x)|_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) \\ &= -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

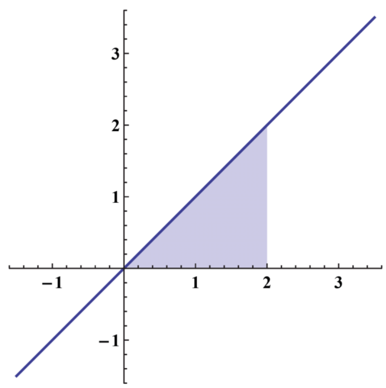
   Ker je funkcija $f(x) = \sin(x)$ liha, velja:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = 0$$

Primeri izračunov ploščine z določenimi integrali

Primer 10

Izračunaj ploščino osenčenega področja:



Ploščino tega področja lahko izračunamo po obrazcu za izračun ploščine trikotnika:

$$pl = \frac{s \cdot V_s}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

Ploščino lahko izračunamo tudi z uporabo določenega integrala. Najprej določimo funkcijo iz grafa. To je $f(x) = x$. Nato določimo interval integriranja: spodnja meja je $a = 0$, zgornja meja pa $b = 2$. Izračunamo določeni integral:

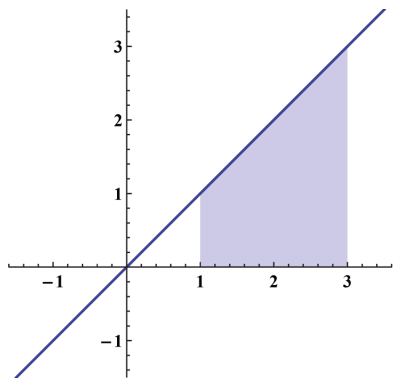
$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{0}{2} = 2.$$

Ploščina je tako enaka

$$pl = 2.$$

Primer 11

Izračunaj ploščino osenčenega področja:



Ploščino tega področja lahko izračunamo po obrazcu za izračun ploščine trapeza:

$$pl = \frac{a+c}{2} \cdot V = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4.$$

Ploščino lahko izračunamo tudi z uporabo določenega integrala. Najprej določimo funkcijo iz grafa. To je $f(x) = x$. Nato določimo interval integriranja: spodnja meja je $a = 1$, zgornja meja pa $b = 3$. Izračunamo določeni integral:

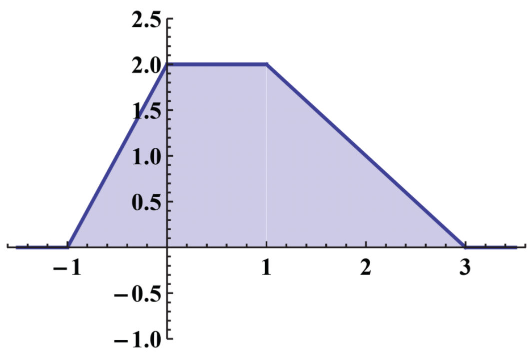
$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^3 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

Ploščina je tako enaka

$$pl = 4.$$

Primer 12

Izračunaj ploščino osenčenega področja:



Ploščino lahko izračunamo z uporabo določenih integralov.
Najprej napišimo matematično funkcijo iz grafa:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 < x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

Nato določimo interval integriranja: spodnja meja je $a = -1$, zgornja meja pa $b = 3$.
Izračunamo določeni integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^0 (2x+2)dx + \int_0^1 2dx + \int_1^3 (-x+3)dx =$$
$$= (x^2+2x)\Big|_{-1}^0 + 2x|_0^1 + (-\frac{x^2}{2} + 3x)\Big|_1^3 = 5$$

Ploščina je tako enaka

$$pl = 5.$$

Ploščino lahko izračunamo tudi iz ploščine trapeza, ki ga opisuje graf funkcije $f(x)$. V tem primeru je

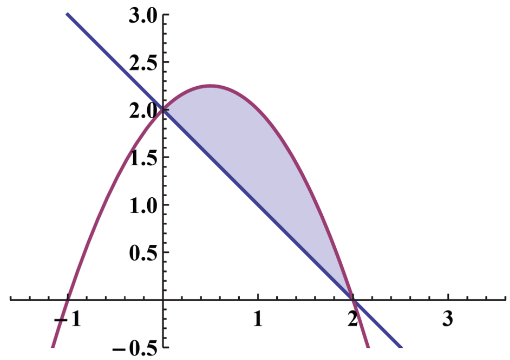
$$pl = \frac{a+c}{2} \cdot V = \frac{4+1}{2} \cdot 2 = 5.$$

Primer 13

Izračunaj ploščino preseka med krivuljami, ki so predstavljene s funkcijama:

$$f_1(x) = -x^2 + x + 2 \quad \text{in} \quad f_2(x) = 2 - x.$$

Najprej narišimo presek grafov obeh funkcij:



Nato določimo presečišča grafov obeh krivulij:

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 2 - x \\ -x^2 + 2x &= 0 \\ x(2 - x) &= 0 \end{aligned}$$

Ničle so pri $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Presečišča so tako v točkah $(0, 2)$ in $(2, 0)$.

Določimo ustrezne ploščine:

- ploščina p_1 pod premico $f_2(x)$ na intervalu med 0 in 2:

$$p_1 = \int_0^2 f_2(x)dx = \int_0^2 (2 - x)dx = (2x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^2 = 4 - 2 - 0 = 2$$

- ploščina p_2 pod parabolo $f_1(x)$ na intervalu med 0 in 2:

$$p_2 = \int_0^2 f_1(x)dx = \int_0^2 (-x^2+x+2)dx = (-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}$$

Ploščina je tako enaka

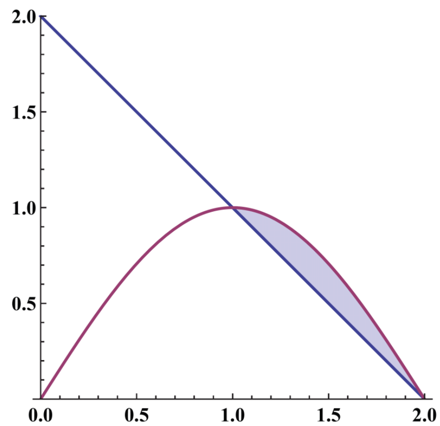
$$pl = p_2 - p_1 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}.$$

Primer 14

Izračunaj ploščino preseka med krivuljami, ki so predstavljene s funkcijama:

$$f_1(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) \quad \text{in} \quad f_2(x) = 2 - x.$$

Najprej narišimo presek grafov obeh funkcij:



Nato določimo presečišča grafov obeh krivulij. Če izberemo $x_1 = 1$, dobimo $f_1(x_1) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ in $f_2(x_1) = 2 - 1 = 1$. Torej je presečišče v točki $(1, 1)$. Podobno lahko ugotovimo za $x_2 = 2$. Ker velja $f_1(x_2) = \sin(\pi) = 0 = 2 - 2 = f_2(x_2)$, je v točki $(2, 0)$ presečišče.

Določimo ustrezne ploščine:

- ploščina p_1 pod premico $f_2(x)$ na intervalu med 1 in 2:

$$p_1 = \int_0^2 f_2(x)dx = \int_0^2 (2-x)dx = (2x - \frac{x^2}{2})\Big|_1^2 = 4-2-(2-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

- ploščina p_2 pod krivuljo sinusa $f_1(x)$ na intervalu med 1 in 2:

$$\begin{aligned} p_2 &= \int_1^2 f_1(x)dx = \int_1^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)dx = (-\frac{1}{\pi/2}\cos(\frac{\pi}{2}x))\Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{\pi}(\cos\pi - \cos(\frac{\pi}{2})) = -\frac{2}{\pi}(-1) = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Ploščina je tako enaka

$$pl = p_2 - p_1 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} = \frac{4-\pi}{2\pi}.$$

3.2.2 Numerično računanje določenih integralov

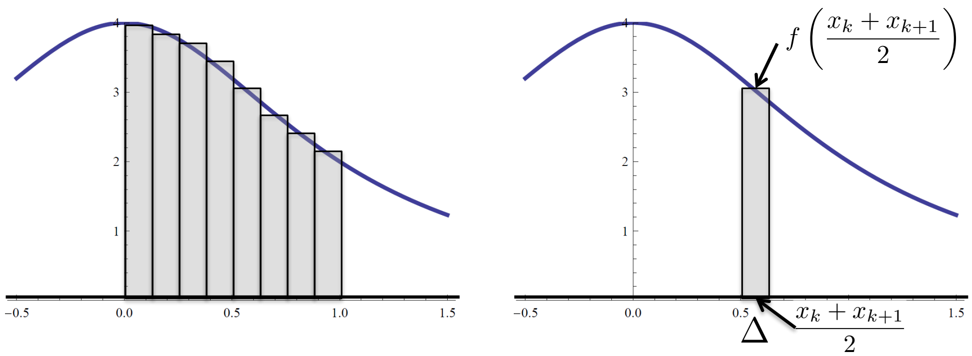
Ker vrednost določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja ploščino lika, ki je določen med grafom funkcije $f(x)$ in abscisno osjo na intervalu (a, b), lahko izračunamo določeni integral tudi numerično s pomočjo razdelitve lika na manjše dele, kjer izračunamo ploščine in jih nato seštejemo v skupno ploščino lika. Tako izračunana ploščina lika seveda predstavlja približno vrednost določenega integrala, vendar pa se lahko s povečevanjem števila manjših delov poljubno natančno približamo dejanski rešitvi določenega integrala. Na ta način seveda ni potrebno analitično računati integrale.

Spoznali bomo tri načine numeričnega izračuna določenih integralov: pravokotno pravilo, trapezno pravilo in Simpsonovo pravilo.

Pravokotno pravilo

Pri numeričnem izračunu integrala $\int_a^b f(x)dx$ s pravokotnim pravilom razdelimo interval integriranja (a, b) na n enako velikih podintervalov dolžine $\Delta = \frac{b-a}{n}$. Točke razdelitve označimo z $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, pri čemer velja $x_{k+1} - x_k = \Delta$ za vse k. Na vsakem takšnem podintervalu lahko definiramo pravokotnik, ki ima eno stranico dolgo Δ, drugo stranico pa določimo tako, da je višina pravokotnika enaka vrednosti funkcije na sredini tega podintervala. Sredino podintervala (x_k, x_{k+1}) izračunamo kot $\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$, kar pomeni, da je druga stranica pravokotnika enaka vrednosti funkcije v tej točki, $f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})$. To je prikazano na sliki 3.7 desno. Ploščina tako določenega pravokotnika je enaka $\Delta \cdot f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})$.

Da izračunamo celotno ploščino na intervalu (a, b), seštejemo vse ploščine



Slika 3.7: Izračun določenega integrala s pravokotnim pravilom. Ploščino pod krivuljo izračunamo kot vsoto ploščin pravokotnikov širine Δ in višine $f((x_k + x_{k+1})/2)$.

pravokotnikov, ki smo jih določili na podintervalih (x_k, x_{k+1}), kot je to prikazano na sliki 3.7 levo. To lahko formalno zapišemo kot pravokotno pravilo za izračun integrala:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \tag{3.1}$$

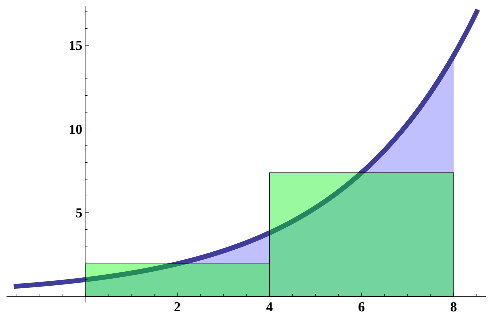
Primer 15

Izračunaj $\int_0^8 e^{\frac{x}{3}} dx$ numerično s pravokotnim pravilom in rešitev primerjaj z analitično rešitvijo integrala.

Izračunajmo najprej analitično rešitev:

$$\int_0^8 e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^8 = 3e^{\frac{8}{3}} - 3 \doteq 40.1757$$

Če izračunamo integral numerično s pravokotnim pravilom z dvema podintervaloma ($n = 2$), izgleda to tako, kot je prikazano na sliki:



V tem primeru je pravokotno pravilo za izračun integrala enako:

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{8-0}{2} \cdot [f(2) + f(6)] = 4 \cdot [e^{\frac{2}{3}} + e^2] \doteq 37.3472$$

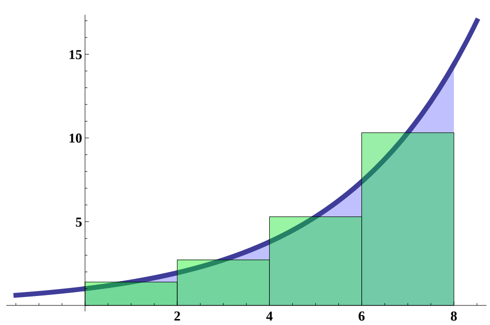
Razlika med analitično in numerično rešitvijo je

$$|40.1757 - 37.3472| = 2.8285.$$

Primer 16

Izračunaj $\int_0^8 \sqrt{x} dx$ numerično s pravokotnim pravilom s štirimi podintervali.

Če izračunamo integral numerično s pravokotnim pravilom s 4 podintervali ($n = 4$), izgleda to tako, kot je prikazano na sliki:



V tem primeru je pravokotno pravilo za izračun integrala enako:

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) &= \frac{8-0}{4} \cdot [f(1) + f(3) + f(5) + f(7)] = \\ &= 2 \cdot [e^{\frac{1}{3}} + e^{1} + e^{\frac{5}{3}} + e^{\frac{7}{3}}] \doteq 39.4413 \end{aligned}$$

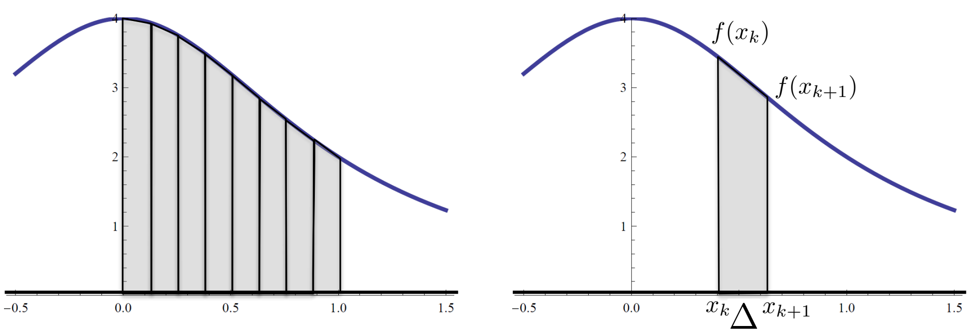
Razlika med analitično in numerično rešitvijo je

$$|40.1757 - 39.4413| = 0.7344.$$

Razlika je pri $n = 4$ manjša kot pri $n = 2$, kar je razumljivo, saj se s povečevanjem števila podintervalov manjša napaka numeričnega izračuna.

Trapezno pravilo

Pri trapeznem pravilu za izračun določenega integrala ravno tako razdelimo interval (a, b) na n enako velikih podintervalov dolžine $\Delta = \frac{b-a}{n}$. Točke razdelitve lahko označimo z $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, pri čemer velja $x_{k+1} - x_k = \Delta$ za vse k. Na vsakem takšnem podintervalu (x_k, x_{k+1}) pa pri trapeznem pravilu računamo ploščino trapeza z osnovnicama z osnovnicama $f(x_k)$ in $f(x_{k+1})$ in višino, ki je enaka širini podintervala Δ. Ploščina tako določenega trapeza je enaka $\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta$. Izračun določenega integrala z razdelitvijo na podintervale, na katerih se izračuna ploščine trapezov pod krivuljo, je prikazan na sliki 3.8.



Slika 3.8: Izračun določenega integrala s trapeznim pravilom. Ploščino pod krivuljo izračunamo kot vsoto ploščin trapezov višine Δ in z osnovnicama $f(x_k)$ in $f(x_{k+1})$.

Izračun celotne ploščine na intervalu (a, b), ki ustreza določenemu integralu

$\int_a bf(x)dx$, izvedemo s seštevanjem vseh ploščin trapezov, ki smo jih določili na podintervalih (x_k, x_{k+1}). Skupno vsoto vseh ploščin posameznih trapezov na podintervalih lahko zapišemo kot trapezno pravilo za izračun integrala:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} &= \frac{\Delta}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(x_{k+1}) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]\end{aligned} \tag{3.2}$$

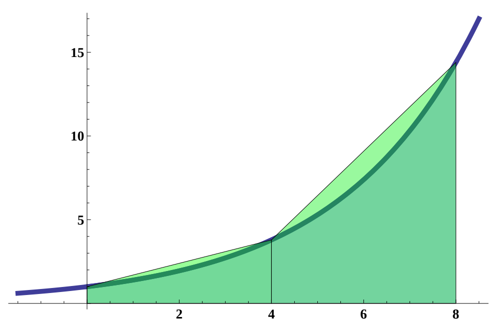
Primer 17

Izračunaj $\int_0^8 e^{\frac{x}{3}} dx$ numerično s trapeznim pravilom in rešitev primerjaj z analitično rešitvijo integrala.

Analitično rešitev smo že izračunali v prejšnjem primeru:

$$\int_0^8 e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} \Big|_0^8 = 3e^{\frac{8}{3}} - 3 \doteq 40.1757$$

Če izračunamo integral numerično s trapeznim pravilom z dvema podintervaloma ($n = 2$), izgleda to tako, kot je prikazano na sliki:



V tem primeru je trapezno pravilo za izračun integrala enako:

$$\frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] = \frac{8-0}{2 \cdot 2} \cdot [f(0) + 2f(4) + f(8)] =$$
$$= 2 \cdot [e^{\frac{0}{3}} + 2e^{\frac{4}{3}} + e^{\frac{8}{3}}] \doteq 45.9585$$

Razlika med analitično in numerično rešitvijo je

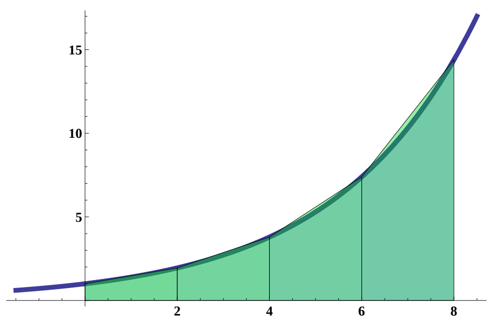
$$|40.1757 - 45.9585| = 5.7828,$$

kar je več kot v primeru s pravokotnim pravilom. To je zaradi tega, ker s trapeznim pravilom zelo slabo ocenimo predvsem ploščino drugega podintervala zaradi oblike funkcije $e^{\frac{x}{3}}$, kot je to lepo vidno na sliki.

Primer 18

Izračunaj $\int_0^8 e^{\frac{x}{3}}\,dx$ numerično s trapeznim pravilom s 4 podintervali.

Če izračunamo integral numerično s trapeznim pravilom s 4 podintervali ($n = 4$), izgleda to tako, kot je prikazano na sliki:



V tem primeru je trapezno pravilo za izračun integrala enako:

$$
\begin{aligned}
& \frac{b-a}{2n} \cdot \left[f(a) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \\
= \quad & \frac{8-0}{2 \cdot 4} \cdot [f(0) + 2f(2) + 2f(4) + 2f(6) + f(8)] = \\
= \quad & 1 \cdot [e^{\frac{0}{3}} + 2e^{\frac{2}{3}} + 2e^{\frac{4}{3}} + 2e^{\frac{6}{3}} + e^{\frac{8}{3}}] \doteq 41.6528
\end{aligned}
$$

Razlika med analitično in numerično rešitvijo je

$$|40.1757 - 41.6528| = 1.4771.$$

Razlika je pri $n = 4$ manjša kot pri $n = 2$, kar je razumljivo, saj se s povečevanjem števila podintervalov manjša napaka numeričnega izračuna, kljub temu pa je večja kot v primeru enakega števila podintervalov s pravokotnim pravilom, kar je zopet posledica slabe ocene ploščine s trapezom predvsem v zadnjem podintervalu.

Simpsonovo pravilo

Pri Simpsonovem pravilu ravno tako razdelimo interval (a, b) določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$ na podintervale enake dolžine $\Delta = \frac{b-a}{n}$. Točke razdelitve lahko označimo z $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, pri čemer velja $x_{k+1} - x_k = \Delta$ za vse k. Nato pa aproksimiramo del krivulje na intervalu med x_{k-1} in x_{k+1} s kvadratno funkcijo in nato izračunamo ploščino pod parabolo. Te ploščine nato seštejemo po celotnem intervalu integriranja. Na ta način lahko izpeljemo Simpsonovo pravilo za aproksimacijo določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$ kot:

$$\frac{b-a}{3n}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Opazimo lahko, da se razen začetne in končne točke alternirajoče ponavljajo množenja s 4 in z 2 vseh notranjih točk.

S tem pravilom v splošnem lahko bolj natančno aproksimiramo vrednost določenega integrala ob enakem številu členov kot s trapeznim ali pravokotnim pravilom.

Primer 19

Izračunaj $\int_0^8 e^{\frac{x}{3}} dx$ numerično s Simpsonovim pravilom z dvema in štirimi podintervali.

V primeru dveh intervalov $(n = 2)$ je Simpsonovo pravilo za izračun integrala enako:

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{3n} \cdot [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(b)] \\ = & \frac{8-0}{3 \cdot 2} \cdot [f(0) + 4f(4) + f(8)] = \\ = & \frac{4}{3} \cdot [e^{\frac{0}{3}} + 4e^{\frac{4}{3}} + e^{\frac{8}{3}}] \doteq 40.7555 \end{aligned}$$

V primeru štirih intervalov $(n = 4)$ je Simpsonovo pravilo za izračun integrala enako:

$$\begin{aligned}
& \frac{b-a}{3n} \cdot [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(b)] \\
= \; & \frac{8-0}{3\cdot 4} \cdot [f(0) + 4f(2) + 2f(4) + 4f(6) + f(8)] = \\
= \; & \frac{2}{3} \cdot [e^{\frac{0}{3}} + 4e^{\frac{2}{3}} + 2e^{\frac{4}{3}} + 4e^{\frac{6}{3}} + e^{\frac{8}{3}}] \doteq 40.2176
\end{aligned}$$

Razlika med analitično in numerično rešitvijo je $|40.1757 - 40.7555| = 0.5798$ pri dveh podintervalih in $|40.1757 - 40.2176| = 0.0419$ pri štirih podintervalih.

Tudi tu se razlika s povečevanjem števila podintervalov manjša. Če primerjamo metode na tem primeru funkcije določenega integrala funkcije $e^{\frac{x}{3}}$ lahko ugotovimo, da smo se najbolj približali analitični rešitvi s Simpsonovim pravilom, malo manj natančni pa smo bili s pravokotnim pravilom. Slabše je bilo trapezno pravilo, kar je posledica slabe ocene ploščine predvsem na zadnjih podintervalih trapeznega pravila.

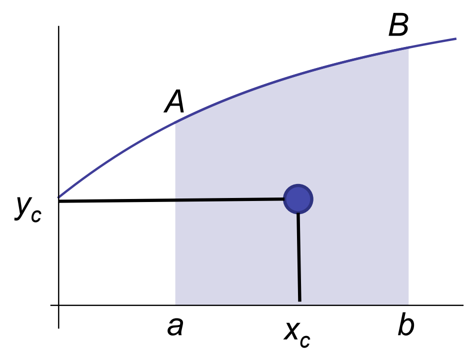
V splošnem velja, da s Simpsonovim pravilom dosežemo boljše rezultate aproksimacije določenih integralov kot z ostalima dvema praviloma.

3.2.3 Primer uporabe določenih integralov za izračun težišča

Masno težišče telesa ali sistema teles izračunamo kot prispevke posameznih masnih točk v telesu. Če je število točk končno, lahko položaj težišča določimo kot uteženo vsoto prispevkov posameznih masnih točk v telesu ali sistemu teles. V primeru homogenega telesa so ti prispevki sestavljeni iz neskončno mnogo takšnih točk, zato namesto vsote uteženih prispevkov uporabimo integral. Pogledali si bomo, kako lahko izračunamo položaj težišča v homogenih telesih v dveh dimenzijah.

Najprej si poglejmo primer izračuna težišča za homogeno telo, ki ga lahko opišemo s krivuljo funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b) in abscisno osjo, kot je to prikazano na sliki 3.9.

V tem primeru izračunamo najprej ploščino S lika pod krivuljo funkcije $y = f(x)$ na intervalu (a, b) z določenim integralom $S = \int_a^b f(x)dx$, nato pa izračunamo koordinate težišča po naslednjem obrazcu:

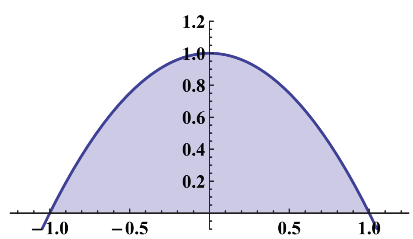


Slika 3.9: Težišče lika, ki ga opišemo s krivuljo od A do B na intervalu (a, b).

$$x_C = \frac{\int_a^b xydx}{S}, \qquad y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{S}.$$

Primer 20

Izračunaj težišče lika omejenega s parabolo $y = 1 - x^2$ na intervalu $[-1, 1]$, prikazanega na sliki:



Najprej izračunamo ploščino lika $S = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \frac{4}{3}$.
Potem izračunamo x-koordinato težišča:

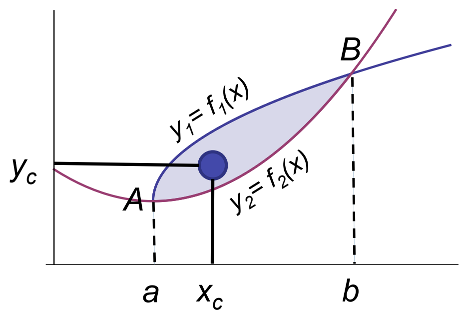
$$x_C = \frac{1}{S}\int_{-1}^{1} x(1 - x^2)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Nato izračunamo še y-koordinato težišča:

$$y_C = \frac{1}{2}\frac{1}{S}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^2dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\left(x - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

Težišče lika je torej v točki $(0, \frac{2}{5})$.

Poglejmo si še primer, ko je homogeno telo določeno s presekom dveh krivulj, kot je to prikazano na sliki 3.10.



Slika 3.10: Težišče lika, ki ga opišemo z dvema krivuljama med točkama A in B na intervalu (a, b).

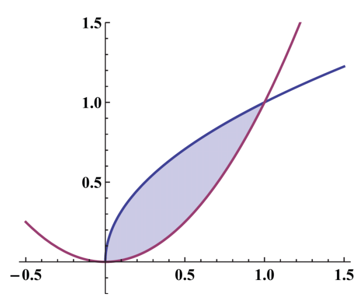
Tudi v tem primeru najprej izračunamo ploščino S lika, ki ga omejujeta krivulji s funkcijama $y_1 = f_1(x)$ in $y_2 = f_2(x)$, nato pa izračunamo koordinate težišča po naslednjem obrazcu:

$$x_C = \frac{\int_a^b x(y_1 - y_2)dx}{S}, \qquad y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx}{S},$$

pri čemer predstavlja $y_1 = f_1(x)$ zgornji del krivulje in $y_2 = f_2(x)$ spodnji del krivulje med točkama A in B.

Primer 21

Izračunaj težišče lika omejenega s krivuljama $y_1 = \sqrt{x}$ in $y_2 = x^2$, prikazanega na sliki:



Najprej določimo presečišče med krivuljama. Presečišča sta v točkah $(0, 0)$ in $(1, 1)$.

Nato izračunamo ploščino lika:

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Potem izračunamo x-koordinato težišča:

$$x_C = \frac{1}{S} \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx = 3 \cdot \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{9}{20}.$$

Nato izračunamo še y-koordinato težišča:

$$y_C = \frac{1}{2} \frac{1}{S} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{9}{20}.$$

Težišče lika je torej v točki $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$.

Literatura

[1] F. Ayres, E. Mendelson: *Schaum's Outline of Calculus, 6th Edition*, McGraw-Hill, 2012.

[2] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor Kosta: *Matematika I*, Založba FE in FRI, Univerza v Ljubljani, Ljubljana, 2004.

[3] G. B. Thomas: *Thomas' Calculus*, Pearson Education, 2005.

[4] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, G. Musiol, H. Mühlig: *Matematični priročnik*, 2. predelana in dopolnjena izdaja, 1. natis, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1997.

[5] B. Orel: *Osnove numerične matematike*, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani, Ljubljana.

ZDRAVSTVENA FAKULTETA
UNIVERZA V LJUBLJANI
2013